**Задание 14 (C2)**

**Стереометрия**

**ЕГЭ-2021**

Все рёбра правильной треугольной призмы *ABCA*1*B*1*C*1 имеют длину 6. Точки *M* и *N* – середины рёбер *AA*1 и *A*1*C*1 соответственно.

а) Докажите, что прямые *BM* и *MN* перпендикулярны.

б) Найдите угол между плоскостями *BMN* и *ABB*1.

(***ЕГЭ-2021, 2020, 2019, 2018, 2017, 2016, 2015, Демо***, Сб.11, 2020)

**или**

В правильной четырёхугольной пирамиде *SABCD* сторона *AB* основания равна 16, а высота пирамиды равна 4. На рёбрах *AB*, *CD* и *AS* отмечены точки *M*, *N* и *K* соответственно, причём *AM* = *DN* = 4 и *AK*= 3.

а) Докажите, что плоскости *MNK* и *SBC* параллельны.

б) Найдите расстояние от точки *M* до плоскости *SBC*.

(***ЕГЭ-2021, Демо, ЕГЭ-2016, основная волна Юг***)

***1. Куб***

1. Длина диагонали куба *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1 равна 3. На луче *A*1*C* отмечена точка *P* так, что *A*1*P* = 4.

а) Докажите, что *PBDC*1 – правильный тетраэдр.

б) Найдите длину отрезка *AP*.

(***ЕГЭ-2017, резервный день досрочной волны***, Сб.12, 2019) Гущин

1. Длина диагонали куба *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1 равна . На луче *A*1*C* отмечена точка *P* так, что *A*1*P*=.

а) Докажите, что *PBDC*1 – правильный тетраэдр.

б) Найдите длину отрезка *AP*.

(***ЕГЭ-2017, резервный день досрочной волны***)

1. Точки *P* и *Q –* середины рёбер *AD* и *CC*1 куба *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1 соответственно.

а) Докажите, что прямая *BQ* перпендикулярна прямой *B*1*P*.

б) Пусть *H –* проекция точки *Q* на прямую *B*1*P*. Найдите *PH*, если *AB* = 12.

(*ЕГЭ-2020, Т.Р.*)

1. Точки *P* и *Q –* середины рёбер *AD* и *CC*1 куба *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1 соответственно.

а) Докажите, что прямая *BQ* перпендикулярна прямой *B*1*P*.

б) Пусть *H –* проекция точки *Q* на прямую *B*1*P*. Найдите *B*1*H*, если *AB* = 24.

(*ЕГЭ-2020, Т.Р.*)

1. На рёбрах *CD* и *BB*1 куба *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1 с ребром 12 отмечены точки *P* и *Q* соответственно, причём *DP* = 4, а *B*1*Q* = 3. Плоскость *APQ* пересекает ребро *CC*1 в точке *M*.

а) Докажите, что точка *M* является серединой ребра *CC*1.

б) Найдите расстояние от точки *C* до плоскости *APQ*.

(***ЕГЭ-2016, резервный день основной волны***) Гущин

1. На рёбрах *DD*1 и *BB*1 куба *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1 с ребром 12 отмечены точки *P* и *Q* соответственно, причём *DP* = 10, а *B*1*Q* = 4. Плоскость *A*1*PQ* пересекает ребро *CC*1 в точке *M*.

а) Докажите, что точка *M* является серединой ребра *CC*1.

б) Найдите расстояние от точки *C*1 до плоскости *A*1*PQ*.

(***ЕГЭ-2016, резервный день основной волны***) Гущин

1. В кубе *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1 все ребра равны 6.

а) Докажите, что угол между прямыми *AC* и *BC*1 равен 60°.

б) Найдите расстояние между прямыми *AC* и *BC*1.

(***ЕГЭ-2018, основная волна***) Гущин

1. В кубе *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1 все рёбра равны 6.

а) Докажите, что угол между прямыми *AC* и *BD*1 равен 90°.

б) Найдите расстояние между прямыми *AC* и *BD*1.

(***ЕГЭ-2018, основная волна***, Сб.12, 2019)

1. В кубе *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1 рёбра равны 1. На продолжении отрезка *A*1*C*1 за точку *C*1 отмечена точка *M* так, что *A*1*C*1 = *C*1*M*, а на продолжении отрезка *B*1*C* за точку *C* отмечена точка *N* так, что *B*1*C* = *CN*.

а) Докажите, что *MN* = *MB*1.

б) Найдите расстояние между прямыми *B*1*C*1 и *MN*.

(***ЕГЭ-2019, резервный вариант***) Гущин

1. Точка *E* − середина ребра *AA*1 куба *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1.

а) Докажите, что сечение куба плоскостью *DEB*1 является ромбом.

б) Найдите угол между прямыми *DE* и *BD*1.

(Сб.5, 2018)

1. Дан куб *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1.

а) Докажите, что плоскости *ABC*1 и *CDA*1 перпендикулярны.

б) Найдите угол между прямой *AC*1 и плоскостью *BCC*1.

(Сб.3, Сб.4, 2018)

1. Дан куб *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1.

а) Докажите, что сечение куба плоскостью, проходящей через центр куба перпендикулярно диагонали *AC*1, является правильным шестиугольником.

б) Найдите угол между прямой *AC*1 и плоскостью *BCC*1.

(Сб.7, 2020)

1. Дан куб *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1.

а) Докажите, что прямая *B*1*D* перпендикулярна плоскости *A*1*BC*1.

б) Найдите угол между плоскостями *AB*1*C*1 и *A*1*B*1*C*.

(Сб.4, Сб.7, 2020, Сб.3, 2019)

1. Дан куб *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1.

а) Докажите, что прямая *BD*1 перпендикулярна плоскости *ACB*1.

б) Найдите угол между плоскостями *AD*1*C*1 и *A*1*D*1*C*.

(Сб.3, Сб.4, 2019)

1. Дан куб *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1. Точка *K* − середина ребра *C*1*D*1.

а) Докажите, что расстояние от вершины *A*1 до прямой *BK* равно ребру куба.

б) Найдите угол между плоскостями *KBA*1 и *BCC*1.

(*ЕГЭ-2019, Т.Р. 10кл.*)

1. Дан куб *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1. Точка *K* − середина ребра *C*1*D*1.

а) Докажите, что расстояние от вершины *A*1 до прямой *BK* равно ребру куба.

б) Найдите угол между плоскостями *KBA*1 и *ADD*1.

(*ЕГЭ-2019, Т.Р. 10кл.*)

1. Точка *O –* центр грани *ABCD* куба *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1. На рёбрах *AD* и *C*1*D*1 отмечены соответственно точки *M* и *N* так, что *DM* = *D*1*N* = *AO*.

а) Докажите, что прямая *MN* образует с плоскостью *DCC*1 угол 30°.

б) Найдите угол между плоскостями *MNO* и *DCC*1.

(*ЕГЭ-2020, Т.Р., 10кл.*)

1. Точка *O –* центр грани *ABB*1*A*1куба *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1. На рёбрах *AA*1и *C*1*D*1 отмечены соответственно точки *M* и *N* так, что *A*1*M* = *D*1*N* = *AO*.

а) Докажите, что прямая *MN* образует с плоскостью *A*1*B*1*C*1 угол 30°.

б) Найдите угол между плоскостями *MNO* и *A*1*B*1*C*1.

(*ЕГЭ-2020, Т.Р., 10кл.*)

1. В кубе *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1 все рёбра равны 4. На его ребре *BB*1 отмечена точка *K* так, что *KB* = 3. Через точки *K* и *C*1 проведена плоскость α, параллельная прямой *BD*1.

а) Докажите, что , где *P* – точка пересечения плоскости α с ребром *A*1*B*1.

б) Найдите угол наклона плоскости α к плоскости грани *BB*1*C*1*C*.

(***ЕГЭ-2015, досрочная волна Запад***, Сб.9, 2019, Сб.6, 2018) Гущин

1. В кубе *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1 все рёбра равны 5. На его ребре *BB*1 отмечена точка *K* так, что *KB* = 4. Через точки *K* и *C*1 проведена плоскость α, параллельная прямой *BD*1.

а) Докажите, что , где *P* – точка пересечения плоскости α с ребром *A*1*B*1.

б) Найдите угол наклона плоскости α к плоскости грани *BB*1*C*1*C*.

(Сб.6, 2019)

1. Через вершины *C*, *B*1 и *D*1 куба *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1 проведена плоскость α.

а) Докажите, что плоскость α перпендикулярна диагонали *AC*1 куба.

б) Найдите площадь сечения куба плоскостью α, если ребро куба равно *a*.

(Сб.12, 2019)

1. Точка *M* – середина ребра *CD* единичного куба *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1. Через вершину *A*1 проведена плоскость, параллельная прямым *AM* и *D*1*M*.

а) Докажите, что эта плоскость проходит через середину ребра *AB*.

б) Найдите площадь сечения куба этой плоскостью.

(Сб.12, 2019)

1. Через середину ребра *AB* куба *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1 проведена плоскость, параллельная прямым *BD*1 и *A*1*C*1.

а) Докажите, что эта плоскость делит диагональ *BD*1 в отношении , считая от вершины *D*.

б) Найдите площадь полученного сечения, если ребро куба равно 4.

(Сб.12, 2019)

1. Точки *P* и *Q* − середины рёбер *AD* и *CC*1 куба *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1 соответственно.

а) Докажите, что прямые *B*1*P* и *QB* перпендикулярны.

б) Найдите площадь сечения куба плоскостью, проходящей через точку *P* и перпендикулярной прямой *BQ*, если ребро куба равно 4.

(*ЕГЭ-2017, Т.Р.*)

1. Точки *P* и *Q* − середины рёбер *AD* и *CC*1 куба *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1 соответственно.

а) Докажите, что прямые *B*1*P* и *QB* перпендикулярны.

б) Найдите площадь сечения куба плоскостью, проходящей через точку *P* и перпендикулярной прямой *BQ*, если ребро куба равно 6.

(*ЕГЭ-2017, Т.Р.*)

1. Точки *P* и *Q* − середины рёбер *AD* и *CC*1 куба *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1 соответственно.

а) Докажите, что прямые *B*1*P* и *QB* перпендикулярны.

б) Найдите площадь сечения куба плоскостью, проходящей через точку *P* и перпендикулярной прямой *BQ*, если ребро куба равно 10.

(*ЕГЭ-2020, 2017, Т.Р.*)

1. Ребро куба *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1 равно 6. Точки *K*, *L* и *M* – центры граней *ABCD*, *AA*1*D*1*D* и *CC*1*D*1*D* соответственно.

а) Докажите, что *B*1*KLM* – правильная пирамида.

б) Найдите объём *B*1*KLM*.

(***ЕГЭ-2017, основная волна***) Гущин

1. В кубе *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1 все рёбра равны 7. На его ребре *BB*1 отмечена точка *K* так, что *KB* = 4. Через точки *K* и *C*1 проведена плоскость α, параллельная прямой *BD*1.

а) Докажите, что , где *P* – точка пересечения плоскости α с ребром *A*1*B*1.

б) Найдите объём большей из двух частей куба, на которые он делится плоскостью α.

(***ЕГЭ-2015, досрочная волна Восток***) Гущин

1. В кубе *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1 все рёбра равны 5. На его ребре *BB*1 отмечена точка *K* так, что *KB* = 3. Через точки *K* и *C*1 проведена плоскость α, параллельная прямой *BD*1.

а) Докажите, что , где *P* – точка пересечения плоскости α с ребром *A*1*B*1.

б) Найдите объём большей из двух частей куба, на которые он делится плоскостью α.

(***ЕГЭ-2015, досрочная волна Восток***)

1. Точки *K*, *L* и *M* лежат на рёбрах соответственно *AD*, *CD* и *BB*1 куба *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1, причём .

а) Докажите, что плоскость *KLM* делит ребро *AA*1 куба в отношении , считая от точки *A*.

б) Найдите объём большей из частей куба, на которые он разбивается плоскостью *KLM*, если ребро куба равно 3.

(Сб.12, 2019)

***2. Прямоугольный параллелепипед***

1. Основание прямоугольного параллелепипеда *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1 – квадрат *ABCD*.

а) Докажите, что прямые *BD*1 и *AC* перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между этими прямыми, если стороны основания параллелепипеда равны 3, а боковые рёбра равны 6.

(Сб.12, 2019)

1. Дан прямоугольный параллелепипед *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1. Точки *K* и *L* – центры граней *BB*1*C*1*C* и *A*1*B*1*C*1*D*1 соответственно.

а) Докажите, что точка пересечения прямой *KL* с плоскостью основания *ABCD* равноудалена от вершин B и C.

б) Пусть *M* – середина ребра *CD*. Найдите котангенс угла между прямыми *MD*1 и *KL*, если известно, что *AB* = 2*AA*1.

(Сб.12, 2019)

1. В прямоугольном параллелепипеде *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1 известны рёбра *AB* = 35, *AD* = 12, *AA*1 = 21.

а) Докажите, что высоты треугольников *ABD* и *A*1*BD*, проведённые к стороне *BD*, имеют общее основание.

б) Найдите угол между плоскостями *ABC* и *A*1*DB*.

(Сб.5, 2018) Гущин

1. В прямоугольном параллелепипеде *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1 известны рёбра *AB* = 6, *BC* = 6, *CC*1 = 4.

а) Докажите, что плоскость *BDD*1 перпендикулярна отрезку *AC*.

б) Найдите тангенс угла между плоскостями *ACD*1 и *A*1*B*1*C*1.

(Сб.8, 2020)

1. На ребре *AA*1 прямоугольного параллелепипеда *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1 взята точка *E* так, что . Точка *T* – середина ребра *B*1*C*1. Известно, что *AB* = 9, *AD* = 6, *AA*1 = 14.

а) В каком отношении плоскость *ETD*1 делит ребро *BB*1?

б) Найдите угол между плоскостью *ETD*1 и плоскостью *AA*1*B*1.

(*ЕГЭ-2015, Д.Р.*)

1. На ребре *AA*1 прямоугольного параллелепипеда *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1 взята точка *E* так, что . Точка *T* – середина ребра *B*1*C*1. Известно, что *AB* = 5, *AD* = 8, *AA*1 = 14.

а) В каком отношении плоскость *ETD*1 делит ребро *BB*1?

б) Найдите угол между плоскостью *ETD*1 и плоскостью *AA*1*B*1.

(*ЕГЭ-2015, Д.Р.*, Сб.12, 2019)

На ребре *AA*1 прямоугольного параллелепипеда *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1 взята точка *E* так, что. Точка *T* – середина ребра *B*1*C*1. Известно, что *AB* = 5, *AD* = 8, *AA*1 = 14.

а) Докажите, что плоскость *ETD*1 делит ребро *BB*1 в отношении .

б) Найдите угол между плоскостью *ETD*1 и плоскостью *AA*1*B*1.

(Сб.12, 2019)

1. На ребре *AA*1 прямоугольного параллелепипеда *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1 взята точка *E* так, что. Точка *T* – середина ребра *B*1*C*1. Известно, что *AB* =, *AD* = 6, *AA*1 = 8.

а) Докажите, что сечение параллелепипеда плоскостью *ETD*1 является равнобедренной трапецией.

б) Найдите угол между плоскостью *ETD*1 и плоскостью *A*1*B*1*C*1.

(Сб.7, 2020)

1. На ребре *AA*1 прямоугольного параллелепипеда *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1 взята точка *E* так, что , на ребре *BB*1 – точка *F* так, что , а точка *T* – середина ребра *B*1*C*1. Известно, что *AB* = 5, *AD* = 6, *AA*1 = 14.

а) Докажите, что плоскость *EFT* проходит через вершину *D*1.

б) Найдите угол между плоскостью *EFT* и плоскостью *AA*1*B*1.

(*ЕГЭ-2017, Т.Р.*)

1. На ребре *AA*1 прямоугольного параллелепипеда *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1 взята точка *E* так, что, на ребре *BB*1 – точка *F* так, что , а точка *T* – середина ребра *B*1*C*1. Известно, что *AB* = 2, *AD* = 6, *AA*1 = 6.

а) Докажите, что плоскость *EFT* проходит через вершину *D*1.

б) Найдите угол между плоскостью *EFT* и плоскостью *AA*1*B*1.

(*ЕГЭ-2017, Т.Р.*)

1. На ребре *AA*1 прямоугольного параллелепипеда *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1 взята точка *E* так, что , на ребре *BB*1 – точка *F* так, что , а точка *T* – середина ребра *B*1*C*1. Известно, что *AB* = 3, *AD* = 6, *AA*1 = 18.

а) Докажите, что плоскость *EFT* проходит через вершину *D*1.

б) Найдите угол между плоскостью *EFT* и плоскостью *AA*1*B*1.

(*ЕГЭ-2016, 2015, Т.Р. 10кл.*, Сб.9, 2019)

1. На ребре *AA*1 прямоугольного параллелепипеда *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1 взята точка *E* так, что , на ребре *BB*1 – точка *F* так, что , а точка *T* – середина ребра *B*1*C*1. Известно, что *AB* = 6, *AD* = 4, *AA*1 = 10.

а) Докажите, что плоскость *EFT* проходит через вершину *D*1.

б) Найдите угол между плоскостью *EFT* и плоскостью *AA*1*B*1.

(*ЕГЭ-2016, 2015, Т.Р. 10кл.*, Сб.9, 2019)

1. На ребре *AA*1 прямоугольного параллелепипеда *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1 взята точка *E* так, что , на ребре *BB*1 – точка *F* так, что , а точка *T* – середина ребра *B*1*C*1. Известно, что *AB* = 4, *AD* =2, *AA*1 = 6.

а) Докажите, что плоскость *EFT* проходит через вершину *D*1.

б) Найдите угол между плоскостью *EFT* и плоскостью *BB*1*C*1.

(*ЕГЭ-2016, 2015, Т.Р.*)

1. На ребре *AA*1 прямоугольного параллелепипеда *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1 взята точка *E* так, что , на ребре *BB*1 – точка *F* так, что , а точка *T* – середина ребра *B*1*C*1. Известно, что *AB* = 3, *AD* = 2, *AA*1 = 5.

а) Докажите, что плоскость *EFT* проходит через вершину *D*1.

б) Найдите угол между плоскостью *EFT* и плоскостью *BB*1*C*1.

(*ЕГЭ-2017, Т.Р. 10кл.*)

1. На ребре *AA*1 прямоугольного параллелепипеда *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1 взята точка *E* так, что , на ребре *BB*1 – точка *F* так, что , а точка *T* – середина ребра *B*1*C*1. Известно, что *AB* = 3, *AD* = 4, *AA*1 = 10.

а) Докажите, что плоскость *EFT* проходит через вершину *D*1.

б) Найдите угол между плоскостью *EFT* и плоскостью *BB*1*C*1.

(*ЕГЭ-2016, 2015, Т.Р.*)

1. На ребре *AA*1 прямоугольного параллелепипеда *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1 взята точка *E* так, что , на ребре *BB*1 – точка *F* так, что , а точка *T* – середина ребра *B*1*C*1. Известно, что *AB* = 4, *AD* = 4, *AA*1 = 10.

а) Докажите, что плоскость *EFT* проходит через вершину *D*1.

б) Найдите угол между плоскостью *EFT* и плоскостью *BB*1*C*1.

(*ЕГЭ-2017, Т.Р. 10кл.*)

1. На ребре *AA*1 прямоугольного параллелепипеда *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1 взята точка *E* так, что , на ребре *BB*1 – точка *F* так, что , а на ребре *B*1*C*1 – точка *T* так, что . Известно, что *AB* = 4, *AD* = 3, *AA*1 = 4.

а) Докажите, что плоскость *EFT* проходит через вершину *D*1.

б) Найдите угол между плоскостью *EFT* и плоскостью *BB*1*C*1.

(Сб.1, Сб.3, Сб.4, 2020, Сб.2, 2019)

1. Сечением прямоугольного параллелепипеда *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1 плоскостью α, содержащей прямую *BD*1 и параллельной прямой *AC*, является ромб.

а) Докажите, что грань *ABCD* − квадрат.

б) Найдите угол между плоскостями α и *BCC*1, если *AA*1 = 6, *AB* = 4.

(***ЕГЭ-2017, досрочная волна***, Сб.12, 2019) Гущин

1. Дан прямоугольный параллелепипед *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1. Через прямую *BD*1 проведена плоскость α, параллельная прямой *AC*. Сечение параллелепипеда плоскостью α – ромб.

а) Докажите, что грань *ABCD* – квадрат.

б) Найдите угол между плоскостью α и плоскостью *BCC*1, если известно, что .

(Сб.12, 2019)

1. В прямоугольном параллелепипеде *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1через диагональ *BD*1проведена плоскость α, параллельная прямой *AC*.

а) Докажите, что прямая пересечения плоскости α с плоскостью основания *A*1*B*1*C*1*D*1параллельна прямой *A*1*C*1.

б) Найдите угол между проведённой плоскостью и плоскостью основания параллелепипеда, если *AB*= 6, *BC* = 8, *CC*1= 10.

(*ЕГЭ-2020, Т.Р.*)

1. В прямоугольном параллелепипеде *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1через диагональ *BD*1проведена плоскость α, параллельная прямой *AC*.

а) Докажите, что прямая пересечения плоскости α с плоскостью основания *A*1*B*1*C*1*D*1параллельна прямой *A*1*C*1.

б) Найдите угол между проведённой плоскостью и плоскостью основания параллелепипеда, если *AB*= 5, *BC* = 12, *CC*1= 10.

(*ЕГЭ-2020, Т.Р.*)

1. В прямоугольном параллелепипеде *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1 известны длины рёбер *AA*1 = 7, *AB* = 16, *AD* = 6. Точка *K* – середина ребра *C*1*D*1.

а) Докажите, что плоскость, проходящая через точку *B* перпендикулярно прямой *AK*, пересекает отрезок *A*1*K*.

б) Найдите тангенс угла между этой плоскостью и плоскостью *ABC*.

(Сб.3, Сб.4, 2020)

В прямоугольном параллелепипеде *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1 известны длины рёбер *AA*1 = 7, *AB* = 16, *AD* = 6. Точка *K* – середина ребра *C*1*D*1.

а) Докажите, что плоскость, проходящая через точку *B* перпендикулярно прямой *AK*, делит отрезок *AK* в отношении .

б) Найдите тангенс угла между этой плоскостью и плоскостью *ABC*.

(Сб.7, 2020)

1. В прямоугольном параллелепипеде *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1 известны длины рёбер: *AA*1 = 5, *AB* = 12, *AD*= 8. Точка *K* – середина ребра *C*1*D*1.

а) Докажите, что плоскость, проходящая через точку *B* перпендикулярно прямой *AK*, делит отрезок *AK* в отношении .

б) Найдите тангенс угла между этой плоскостью и плоскостью *ABC*.

(Сб.7, 2020)

1. Плоскость α проходит через середину ребра *AD* прямоугольного параллелепипеда *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1 перпендикулярно прямой *BD*1.

а) Докажите, что угол между плоскостью α и плоскостью *ABC* равен углу между прямыми *BB*1 и *B*1*D*.

б) Найдите угол между плоскостью α и плоскостью *ABC*, если объём параллелепипеда *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1 равен , *AB* = и *AD* = 6.

(*ЕГЭ-2018, Т.Р. 10кл.*)

1. Плоскость α проходит через середину ребра *AD* прямоугольного параллелепипеда *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1 перпендикулярно прямой *BD*1.

а) Докажите, что угол между плоскостью α и плоскостью *ABC* равен углу между прямыми *BB*1 и *B*1*D*.

б) Найдите угол между плоскостью α и плоскостью *ABC*, если объём параллелепипеда *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1 равен , *AB* = и *AD* = 5.

(*ЕГЭ-2018, Т.Р. 10кл.*)

1. На ребре *AA*1 прямоугольного параллелепипеда *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1 взята точка *E* так, что *A*1*E* = 4*EA*. Точка *T* – середина ребра *B*1*C*1. Известно, что *AB* =, *AD* = 16, *AA*1 = 20.

а) Докажите, что плоскость *ETD*1 делит ребро *BB*1 в отношении .

б) Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью *ETD*1.

(*ЕГЭ-2018, Т.Р. 10кл., ЕГЭ-2015, Д.Р. 10-11кл.*)

1. На ребре *AA*1 прямоугольного параллелепипеда *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1 взята точка *E* так, что *A*1*E* = 6*EA*. Точка *T* – середина ребра *B*1*C*1. Известно, что *AB* =, *AD* = 12, *AA*1 = 14.

а) Докажите, что плоскость *ETD*1 делит ребро *BB*1 в отношении .

б) Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью *ETD*1.

(*ЕГЭ-2018, Т.Р. 10кл., ЕГЭ-2015, Д.Р. 10-11кл.*, Сб.12, 2019)

1. В прямоугольном параллелепипеде *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1 известны длины рёбер: *AB* = 4, *BC* = 3, *AA*1 = 2. Точки *P* и *Q* – середины рёбер *A*1*B*1 и *CC*1 соответственно. Плоскость *APQ* пересекает ребро *B*1*C*1 в точке *U*.

а) Докажите, что .

б) Найдите площадь сечения параллелепипеда *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1 плоскостью *APQ*.

(***ЕГЭ-2016***)

1. На ребре *AA*1 прямоугольного параллелепипеда *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1 взята точка *E* так, что , на ребре *BB*1 – точка *F* так, что , а точка *T* – середина ребра *B*1*C*1. Известно, что *AB* =, *AD* = 10, *AA*1 = 16.

а) Докажите, что плоскость *EFT* проходит через вершину *D*1.

б) Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью *EFT*.

(*ЕГЭ-2015, Т.Р.*, Сб.12, 2019)

1. На ребре *AA*1 прямоугольного параллелепипеда *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1 взята точка *E* так, что , на ребре *BB*1 – точка *F* так, что , а точка *T* – середина ребра *B*1*C*1. Известно, что *AB* =, *AD* = 30, *AA*1 = 35.

а) Докажите, что плоскость *EFT* проходит через вершину *D*1.

б) Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью *EFT*.

(*ЕГЭ-2015, Т.Р.*)

1. Диагональ прямоугольного параллелепипеда *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1 равна 13, а диагонали двух соседних граней равны  и .

а) Докажите, что треугольник *AC*1*D*1 прямоугольный.

б) Найдите объём параллелепипеда.

(Сб.12, 2019)

1. Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна  и образует с боковыми гранями углы 30° и 45°.

а) Докажите, что одна из этих граней – квадрат.

б) Найдите объём параллелепипеда.

(Сб.12, 2019)

1. В прямоугольном параллелепипеде *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1 грань *ABCD* – квадрат. Точка *M* лежит на ребре *BC*, причём *CM* : *MB* = 1:2. Известно, что диагональ *DB*1 параллелепипеда перпендикулярна отрезку *C*1*M*.

а) Докажите, что угол между прямой *CB*1 и плоскостью *A*1*B*1*C*1 равен 30°.

б) Найдите объём параллелепипеда, если расстояние между прямыми *DB*1 и *C*1*M* равно .

(Сб.12, 2019)

***3. Параллелепипед***

1. Все грани параллелепипеда *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1 – равные ромбы, причём плоские углы при вершине *C* – острые.

а) Докажите, что .

б) Найдите расстояние от вершины C до плоскости *A*1*B*1*C*1, если плоские углы при вершине C равны 60°, а *AA*1 =.

(Сб.12, 2019)

1. Дан параллелепипед *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1. Его основания *ABCD* и *A*1*B*1*C*1*D*1 – квадраты. Отрезок, соединяющий центр основания *ABCD* с серединой ребра *B*1*C*1, перпендикулярен основаниям.

а) Докажите, что грани *AA*1*B*1*B* и *ABCD* перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между прямыми *AA*1 и *BC*, если все рёбра параллелепипеда равны 2.

(Сб.12, 2019)

1. Дан параллелепипед *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1. Его основания *ABCD* и *A*1*B*1*C*1*D*1 – квадраты. Отрезок, соединяющий вершину *C* с центром основания *A*1*B*1*C*1*D*1, перпендикулярен основаниям.

а) Докажите, что прямые *CC*1 и *BD* перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между прямыми *A*1*C* и *AB*, если сторона основания параллелепипеда равна 6, а боковое ребро равно .

(Сб.12, 2019)

1. Основание *ABCD* параллелепипеда *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1 – квадрат, боковые грани – ромбы, а ортогональная проекция вершины *C*1 на плоскость основания совпадает с точкой пересечения диагоналей основания *ABCD*.

а) Докажите, что.

б) Найдите расстояние между прямыми *AA*1 и *BC*, если *AB* =.

(Сб.12, 2019)

1. Дан параллелепипед *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1. Точка *M* – середина ребра *A*1*B*1.

а) Докажите, что любая плоскость, проведённая через точку *M* параллельно диагонали *CA*1 параллелепипеда, проходит через центр грани *BB*1*C*1*C*.

б) Найдите угол между прямыми *BM* и *CB*1, если параллелепипед прямоугольный, *AB* = 2*BC* и .

(Сб.12, 2019)

1. Точка *O* – центр грани *ABCD* параллелепипеда *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1.

а) Докажите, что отрезок *D*1*O* делится пополам плоскостью *A*1*DC*1.

б) Найдите угол между прямой *D*1*O* и плоскостью *A*1*DC*1, если параллелепипед прямоугольный, *ABCD* – квадрат, а .

(Сб.12, 2019)

1. Точки *M* и *N* – середины рёбер соответственно *CD* и *CC*1 параллелепипеда *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1.

а) Докажите, что плоскость *AMN* проходит через вершину *B*1.

б) Найдите угол между плоскостями *AMN* и *A*1*B*1*C*1, если параллелепипед прямоугольный, а его диагональ *BD*1 перпендикулярна плоскости *AMN*.

(Сб.12, 2019)

1. Дан параллелепипед *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1 с основаниями *ABCD* и *A*1*B*1*C*1*D*1. Точки *M* и *N* – середины рёбер *AD* и *CD* соответственно, точка *K* лежит на ребре *BB*1, причём .

а) Докажите, что плоскость, проходящая через точки *M* , *N* и *K*, делит ребро *CC*1 в отношении , считая от точки *C*.

б) Найдите площадь сечения параллелепипеда этой плоскостью, если параллелепипед *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1 – правильная четырёхугольная призма, сторона основания *ABCD* равна , а боковое ребро равно 12.

(Сб.12, 2019)

1. Дан параллелепипед *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1. Плоскость α проходит через прямую *BA*1 параллельно прямой *CB*1.

а) Докажите, что плоскость α делит диагональ *AC*1 параллелепипеда в отношении , считая от вершины *A*.

б) Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью α, если он прямой, его основание *ABCD* – ромб с диагоналями *AC* = 10 и *BD* =8, а боковое ребро параллелепипеда равно 12.

(Сб.12, 2019)

1. Точки *M* и *N* – середины рёбер *AA*1 и *CC*1 параллелепипеда *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1. Прямые *A*1*C*, *B*1*M* и *BN* попарно перпендикулярны.

а) Докажите, что расстояние между плоскостями *BND* и *B*1*MD*1 вдвое меньше диагонали *A*1*C*.

б) Найдите объём параллелепипеда, если известно, что *A*1*C* = *a* и *B*1*M* = *b*, *BN* = *c*.

(Сб.12, 2019)

1. Плоскость α проходит через середины рёбер *AD*, *CD* и *BB*1 параллелепипеда *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1.

а) Докажите, что эта плоскость делит ребро *CC*1 в отношении , считая от вершины *C*.

б) Найдите объём меньшего из многогранников, на которые плоскость α разбивает параллелепипед, если объём параллелепипеда равен *V*.

(Сб.12, 2019)

1. Плоскость α проходит через вершину *D* и центры граней *AA*1*B*1*B* и *BB*1*C*1*C* параллелепипеда *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1.

а) Докажите, что эта плоскость делит ребро *BB*1 в отношении , считая от вершины *B*.

б) Найдите объёмы многогранников, на которые плоскость α разбивает параллелепипед, если его объём равен *V*.

(Сб.12, 2019)

1. Дан параллелепипед *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1. На лучах *AB*, *AD* и *AA*1 отмечены точки *K*, *L* и *M* соответственно, причём ,  и .

а) Докажите, что плоскость *KLM* делит ребро *B*1*C*1 пополам.

б) В каком отношении плоскость *KLM* делит объём параллелепипеда?

(Сб.12, 2019)

1. На диагонали *BD*1 параллелепипеда *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1 отмечена точка *M*, причём . Через точку *M* проведена плоскость α, параллельная прямым *AB*1 и *CB*1.

а) Докажите, что плоскость α делит ребро *AB* в отношении , считая от вершины *A*.

б) В каком отношении плоскость α делит объём параллелепипеда?

(Сб.12, 2019)

***4. Правильная четырёхугольная призма***

1. В правильной четырёхугольной призме *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1 основание *ABCD* – квадрат. Точка *M* – центр боковой грани *BCC*1*B*1.

а) Докажите, что плоскость *A*1*D*1*M* делит диагональ прямая *AC*1 в отношении , считая от точки *A*.

б) Найдите расстояние от точки *M* до прямой *BD*1, если сторона основания призмы равна 6, а боковое ребро равно 3.

(Сб.12, 2019)

1. В правильной четырёхугольной призме *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1 сторона *AB* основания равна 8, а боковое ребро *AA*1 равно . На рёбрах *BC* и *C*1*D*1 отмечены точки *K* и *L* соответственно, причём *BK*= *C*1*L =*2. Плоскость γ параллельна прямой *BD* и содержит точки *K* и *L*.

а) Докажите, что прямая *A*1*C* перпендикулярна плоскости γ.

б) Найдите расстояние от точки *B* до плоскости γ.

(***ЕГЭ-2016, основная волна Юг***) Гущин

1. В правильной четырёхугольной призме *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1 сторона основания *AB* равна 6, а боковое ребро *AA*1 равно . На рёбрах *BC* и *C*1*D*1 отмечены точки *K* и *L* соответственно, причём *BK* = 4, *C*1*L*=5. Плоскость γ параллельна прямой *BD* и содержит точки *K* и *L*.

а) Докажите, что прямая *AC*1 перпендикулярна плоскости γ.

б) Найдите расстояние от точки *B*1 до плоскости γ.

(***ЕГЭ-2016, основная волна Юг***) Гущин

1. Дана правильная четырёхугольная призма *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1 со стороной основания  и боковым ребром 2. Точки *M* и *N* – середины рёбер *A*1*B*1 и *CC*1 соответственно.

а) Докажите, что .

б) Найдите расстояние от точки *M* до плоскости *BC*1*D*.

(Сб.12, 2019)

1. Дана правильная четырёхугольная призма *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1 с основаниями *ABCD* и *A*1*B*1*C*1*D*1. Точка *M* – середина ребра *B*1*C*1. Прямые *CA*1 и *BM* перпендикулярны.

а) Докажите, что диагональ основания призмы вдвое больше бокового ребра.

б) Найдите угол между прямой *CA*1 и плоскостью *BCC*1.

(Сб.12, 2019)

1. В правильной четырёхугольной призме *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1 сторона основания *AB* равна 6, а боковое ребро *AA*1 равно . На рёбрах *AB*, *A*1*D*1 и *C*1*D*1 отмечены точки *M*, *N* и *K* соответственно, причём *AM* = *A*1*N* = *C*1*K* =1.

а) Пусть *L* − точка пересечения плоскости *MNK* с ребром *BC*. Докажите, что *MNKL* − квадрат.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью *MNK*.

(***ЕГЭ-2016, досрочная волна***, Сб.12, 2019) Гущин

1. В правильной четырёхугольной призме *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1 сторона основания *AB* равна 3, а боковое ребро *AA*1 равно . На рёбрах *AB*, *A*1*D*1 и *C*1*D*1 отмечены точки *M*, *N* и *K* соответственно, причём *AM* = *A*1*N* = *C*1*K* =1.

а) Пусть *L* − точка пересечения плоскости *MNK* с ребром *BC*. Докажите, что *MNKL* − квадрат.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью *MNK*.

(***ЕГЭ-2016, досрочная волна***) Гущин

1. На ребре *AA*1 правильной четырёхугольной призмы *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1 отмечена точка *K*, причём . Через точки *K* и *B* проведена плоскость α, параллельная прямой *AC* и пересекающая ребро *DD*1 в точке *M*.

а) Докажите, что .

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью α, если *AB* = 4, *AA*1 = 6.

(***ЕГЭ-2018, досрочная волна***) Гущин

1. На ребре *AA*1 правильной четырёхугольной призмы *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1 отмечена точка *K*, причём . Через точки *K* и *B* проведена плоскость α, параллельная прямой *AC* и пересекающая ребро *DD*1 в точке *M*.

а) Докажите, что точка *M* – середина ребра *DD*1.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью α, если *AB* = 5, *AA*1 = 4.

(***ЕГЭ-2018, досрочная волна***, Сб.12, 2019)

1. В правильной четырёхугольной призме *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1 сторона основания *AB* равна 5, а боковое ребро *AA*1 равно . На рёбрах *BC* и *C*1*D*1 отмечены точки *K* и *L* соответственно, причём *CK* =2, а *C*1*L*= 1. Плоскость γ параллельна прямой *BD* и содержит точки *K* и *L*.

а) Докажите, что прямая *A*1*C* перпендикулярна плоскости γ.

б) Найдите объём пирамиды, вершина которой – точка *A*1, а основание – сечение данной призмы плоскостью γ.

(Сб.3, Сб.4, 2020, Сб.4, 2019)

1. В правильной четырёхугольной призме *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1 сторона основания *AB* равна 8, а боковое ребро *AA*1 равно 4. На рёбрах *BC* и *C*1*D*1 отмечены точки *K* и *L* соответственно, причём *CK* =5, а *C*1*L*= 3. Плоскость γ параллельна прямой *BD* и содержит точки *K* и *L*.

а) Докажите, что прямая *A*1*C* перпендикулярна плоскости γ.

б) Найдите объём пирамиды, вершина которой – точка *A*1, а основание – сечение данной призмы плоскостью γ.

(Сб.3, Сб.4, 2020, Сб.2, 2019)

1. В правильной четырёхугольной призме *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1 сторона основания *AB* равна 6, а боковое ребро *AA*1 равно . На рёбрах *BC* и *C*1*D*1 отмечены точки *K* и *L* соответственно, причём *CK* =3, а *C*1*L*= 2. Плоскость γ параллельна прямой *BD* и содержит точки *K* и *L*.

а) Докажите, что прямая *A*1*C* перпендикулярна плоскости γ.

б) Найдите объём пирамиды, вершина которой – точка *A*1, а основание – сечение данной призмы плоскостью γ.

(Сб.3, Сб.4, 2020)

***5. Правильная треугольная призма***

1. Дана правильная призма *ABCA*1*B*1*C*1, у которой сторона основания *AB* = 4, а боковое ребро *AA*1 = 9. Точка *M* – середина ребра *AC*, на ребре *AA*1 взята точка *T* так, что *AT* = 1.

а) Докажите, что плоскость *BB*1*M* делит отрезок *C*1*T* пополам.

б) Плоскость *BTC*1 делит отрезок *MB*1 на две части. Найдите длину большей из них.

(Сб.5, 2018)

1. Дана правильная призма *ABCA*1*B*1*C*1, у которой сторона основания *AB* = 4, а боковое ребро *AA*1 = 9. Точка *M* – середина ребра *AC*, а на ребре *AA*1 взята точка *T* так, что *AT* = 3.

а) Докажите, что плоскость *BB*1*M* делит отрезок *C*1*T* пополам.

б) Плоскость *BTC*1 делит отрезок *MB*1 на две части. Найдите длину большей из них.

(Сб.5, 2018)

1. В правильной треугольной призме *АВСА*1*В*1*С*1 сторона *АВ* основания равна 8, а боковое ребро *АА*1 равно 7. На ребре *СС*1 отмечена точка *М*, причем *СМ* = 1.

а) Точки *О* и *О*1 – центры окружностей, описанных около треугольников *АВС* и *А*1*В*1*С*1 соответственно. Докажите, что прямая *ОО*1 содержит точку пересечения медиан треугольника *АВМ*.

б) Найдите расстояние от точки *А*1 до плоскости *АВМ.*

(***ЕГЭ-2020, резервный день основной волны***)

1. В правильной треугольной призме *ABCA*1*B*1*C*1 сторона *AB* основания равна 12, а высота призмы равна 2. На рёбрах *B*1*C*1 и *AB* отмечены точки *P* и *Q* соответственно, причём *PC*1 = 3, а *AQ* = 4. Плоскость *A*1*PQ* пересекает ребро *BC* в точке *M*.

а) Докажите, что точка *M* является серединой ребра *BC*.

б) Найдите расстояние от точки *B* до плоскости *A*1*PQ*.

(***ЕГЭ-2016, резервный день основной волны***) Гущин

1. В правильной треугольной призме *ABCA*1*B*1*C*1 сторона основания *AB* равна 6, а боковое ребро *AA*1 равно 3. На ребре *AB* отмечена точка *K* так, что *AK* = 1. Точки *M* и *L* – середины ребер *A*1*C*1 и *B*1*C*1 соответственно. Плоскость γ параллельна прямой *AC* и содержит точки *K* и *L*.

а) Докажите, что прямая *BM* перпендикулярна плоскости γ.

б) Найдите расстояние от точки *C* до плоскости γ.

(***ЕГЭ-2016, основная волна Запад***) Гущин

1. В правильной треугольной призме *ABCA*1*B*1*C*1 сторона основания *AB* равна 12, а боковое ребро *AA*1 равно . На ребрах *AB* и *B*1*C*1 отмечены точки *K* и *L* соответственно, причём *AK* = 2, а *B*1*L* = 4. Точка *M* – середина ребра *A*1*C*1. Плоскость γ параллельна ребру *AC* и содержит точки *K* и *L*.

а) Докажите, что прямая *BM* перпендикулярна плоскости γ.

б) Найдите расстояние от точки *C* до плоскости γ.

(***ЕГЭ-2016, основная волна Запад***) Гущин

1. В правильной треугольной призме *ABCA*1*B*1*C*1 сторона основания *AB* равна 12, а боковое ребро *AA*1 равно . На ребрах *AB* и *B*1*C*1 отмечены точки *K* и *L* соответственно, причём *AK* = *B*1*L* = 3. Точка *M* – середина ребра *A*1*C*1. Плоскость γ параллельна ребру *AC* и содержит точки *K* и *L*.

а) Докажите, что прямая *BM* перпендикулярна плоскости γ.

б) Найдите расстояние от точки *C* до плоскости γ.

(***ЕГЭ-2016, основная волна Запад***) Гущин

1. В правильной треугольной призме *ABCA*1*B*1*C*1 все рёбра равны 2. Точка *M* – середина ребра *AA*1.

а) Докажите, что прямые *MB* и *B*1*C* перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между прямыми *MB* и *B*1*C*.

(***ЕГЭ-2018, резервный день досрочной волны***, Сб.12, 2019) Гущин

1. а) Докажите, что в правильной треугольной призме *ABCA*1*B*1*C*1 прямая, проходящая через середины отрезков *AA*1 и *BC*1, перпендикулярна этим отрезкам.

б) В правильной треугольной призме *ABCA*1*B*1*C*1, все рёбра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми *AA*1 и *BC*1.

(Сб.5, 2018)

1. Дана правильная треугольная призма *ABCA*1*B*1*C*1. На ребре *BC* взята точка *M*, причём .

а) Докажите, что плоскость, проходящая через центры граней *A*1*B*1*C*1 и *BB*1*C*1*C* параллельно ребру *AC*, проходит через точку *M*.

б) Пусть *K* – середина ребра *A*1*C*1, *N* – центр грани *BB*1*C*1*C*. Найдите угол между прямыми *B*1*K* и *MN*, если *AC* =, *AA*1 =.

(Сб.12, 2019)

1. В правильной треугольной призме *ABCA*1*B*1*C*1 все рёбра равны 1.

а) Докажите, что прямая *AB*1 параллельна прямой, проходящей через середины отрезков *AC* и *BC*1.

б) Найдите косинус угла между прямыми *AB*1 и *BC*1.

(Сб.3, Сб.4, 2020) Гущин

1. В правильной треугольной призме *ABCA*1*B*1*C*1 все рёбра равны 1.

а) Пусть плоскость, проходящая через точки *C*, *C*1 перпендикулярно плоскости *ACC*1, пересекает прямую *AB* в точке *M*. Докажите, что треугольник *MBB*1 равнобедренный.

б) Найдите косинус угла между прямыми *AB*1 и *BC*1.

(Сб.7, 2020)

1. Дана правильная треугольная призма *ABCA*1*B*1*C*1 с основаниями *ABC* и *A*1*B*1*C*1. Скрещивающиеся диагонали *BA*1 и *CB*1 боковых граней *AA*1*B*1*B* и *BB*1*C*1*C* перпендикулярны.

а) Докажите, что .

б) Найдите угол между прямой *BA*1 и плоскостью *BCC*1.

(Сб.12, 2019)

1. В правильной треугольной призме *ABCA*1*B*1*C*1 сторона основания равна 4, а боковое ребро равно 2. Точка *M* – середина ребра *A*1*C*1, а точка *O* – точка пересечения диагоналей боковой грани *ABB*1*A*1.

а) Докажите, что точка пересечения диагоналей четырёхугольника, являющегося сечением призмы *ABCA*1*B*1*C*1 плоскостью *AMB* лежит на отрезке *OC*1.

б) Найдите угол между прямой *OC*1 и плоскостью *AMB*.

(***ЕГЭ-2019, резервный день основной волны***) Гущин

1. В правильной треугольной призме *ABCA*1*B*1*C*1 сторона основания равна 2, а боковое ребро равно 6. Точка *M* – середина ребра *A*1*C*1, а точка *O* – точка пересечения диагоналей боковой грани *ABB*1*A*1.

а) Докажите, что точка пересечения *OC*1 с четырёхугольником, являющимся сечением призмы *ABCA*1*B*1*C*1 плоскостью *ABM*, совпадает с точкой пересечения диагоналей этого четырёхугольника.

б) Найдите угол между прямой *OC*1 и плоскостью *ABM*.

(***ЕГЭ-2019, резервный день основной волны***)

1. В правильной треугольной призме *ABCA*1*B*1*C*1 все рёбра равны 1.

а) Докажите, что основания высот треугольников *A*1*B*1*C* и *A*1*B*1*C*1, проведённых к стороне *A*1*B*1, совпадают.

б) Найдите тангенс угла между плоскостями *ABC* и *CA*1*B*1.

(Сб.8, 2020)

1. В правильной треугольной призме *ABCA*1*B*1*C*1 стороны основания равны 3, боковые рёбра равны 6, точка *D* – середина ребра *CC*1.

а) Пусть прямые *B*1*D* и *BC* пересекаются в точке *E*. Докажите, что угол *EAB* – прямой.

б) Найдите угол между плоскостями *ABC* и *ADB*1.

(Сб.5, 2018)

1. В правильной треугольной призме *ABCA*1*B*1*C*1 стороны основания равны 4, боковые рёбра равны 7, точка *D* – середина ребра *BB*1.

а) Пусть прямые *C*1*D* и *BC* пересекаются в точке *E*. Докажите, что угол *EAC* – прямой.

б) Найдите угол между плоскостями *ABC* и *ADC* 1.

(Сб.5, 2018)

1. В правильной треугольной призме *ABCA*1*B*1*C*1 стороны основания равны 5, боковые рёбра равны 15, точка *D* – середина ребра *CC*1.

а) Пусть прямые *BD* и *B*1*C*1 пересекаются в точке *E*. Докажите, что угол *EA*1*B*1– прямой.

б) Найдите угол между плоскостями *A*1*B*1*C*1 и *BDA* 1.

(Сб.5, 2018)

1. Все рёбра правильной треугольной призмы *ABCA*1*B*1*C*1 имеют длину 6. Точки *M* и *N* – середины рёбер *AA*1 и *A*1*C*1 соответственно.

а) Докажите, что прямые *BM* и *MN* перпендикулярны.

б) Найдите угол между плоскостями *BMN* и *ABB*1.

(***ЕГЭ-2021, 2020, 2019, 2018, 2017, 2016, 2015, Демо***)

1. В правильной треугольной призме *ABCA*1*B*1*C*1 сторона основания *AB* =, а боковое ребро *AA*1= 8.

а) Пусть *M* – середина *BC*. Докажите, что прямые *A*1*M* и *B*1*C*1 перпендикулярны.

б) Найдите тангенс угла между плоскостями *BCA*1 и *BB*1*C*1.

(Сб.7, 2020)

В правильной треугольной призме *ABCA*1*B*1*C*1 сторона основания *AB* =, а боковое ребро *AA*1= 8.

а) Докажите, что плоскость *BCA*1 перпендикулярна плоскости, проходящей через ребро *AA*1 и середину ребра *B*1*C*1.

б) Найдите тангенс угла между плоскостями *BCA*1 и *BB*1*C*1.

(Сб.2, Сб.3, Сб.4, 2020)

1. В правильной треугольной призме *ABCA*1*B*1*C*1 ребро основания *AB* =, а боковое ребро *AA*1= 7.

а) Пусть *M* – середина *BC*. Докажите, что прямые *A*1*M* и *B*1*C*1 перпендикулярны.

б) Найдите тангенс угла между плоскостями *BCA*1 и *BB*1*C*1.

(Сб.7, 2020)

1. Плоскость α проходит через сторону *AB* основания *ABC* правильной треугольной призмы *ABCA*1*B*1*C*1 и середину ребра *B*1*C*1.

а) Пусть *M* − точка пересечения плоскости α с прямой *CC*1. Докажите, что *C*1 − середина отрезка *CM*.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью α, если все рёбра призмы равны *a*.

(Сб.12, 2019)

1. В правильной треугольной призме *ABCA*1*B*1*C*1 все рёбра равны 4. Через точки *A*, *C*1 и середину *T* ребра *A*1*B*1 проведена плоскость.

а) Докажите, что сечение призмы указанной плоскостью является прямоугольным треугольником.

б) Найдите угол между плоскостью сечения и плоскостью *ABC*.

(*ЕГЭ-2019, 2016, 2015, Т.Р.*)

1. В правильной треугольной призме *ABCA*1*B*1*C*1 все рёбра равны 6. Через точки *A*, *C*1 и середину *T* ребра *A*1*B*1 проведена плоскость.

а) Докажите, что сечение призмы указанной плоскостью является прямоугольным треугольником.

б) Найдите угол между плоскостью сечения и плоскостью *ABC*.

(*ЕГЭ-2019, 2016, 2015, Т.Р.*)

1. Дана правильная треугольная призма *ABCA*1*B*1*C*1, у которой сторона основания равна 2, а боковое ребро равно 3. Через точки *A*, *C*1 и середину *T* ребра *A*1*B*1 проведена плоскость.

а) Докажите, что сечение призмы указанной плоскостью является прямоугольным треугольником.

б) Найдите угол между плоскостью сечения и плоскостью *ABC*.

(*ЕГЭ-2017, Т.Р.*)

1. Дана правильная треугольная призма *ABCA*1*B*1*C*1, у которой сторона основания равна 4, а боковое ребро равно 3. Через точки *A*, *C*1 и середину *T* ребра *A*1*B*1 проведена плоскость.

а) Докажите, что сечение призмы указанной плоскостью является прямоугольным треугольником.

б) Найдите угол между плоскостью сечения и плоскостью *ABC*.

(*ЕГЭ-2017, Т.Р.*)

1. Дана правильная треугольная призма *ABCA*1*B*1*C*1, у которой ребро основания равно 4, а высота равна 7. Через точки *A*, *C*1 и середину *T* ребра *A*1*B*1 проведена плоскость.

а) Докажите, что сечение призмы указанной плоскостью является прямоугольным треугольником.

б) Найдите угол между плоскостью сечения и плоскостью *ABC*.

(Сб.8, 2020)

1. Дана правильная треугольная призма *ABCA*1*B*1*C*1, все рёбра которой равны 6. Через точки *A*, *C*1 и середину *T* ребра *A*1*B*1 проведена плоскость.

а) Докажите, что сечение призмы указанной плоскостью является прямоугольным треугольником.

б) Найдите угол между плоскостью сечения и плоскостью *ACC*1.

(*ЕГЭ-2016, Д.Р. 10кл.*)

1. Дана правильная треугольная призма *ABCA*1*B*1*C*1, все рёбра которой равны 8. Через точки *A*, *C*1 и середину *T* ребра *A*1*B*1 проведена плоскость.

а) Докажите, что сечение призмы указанной плоскостью является прямоугольным треугольником.

б) Найдите угол между плоскостью сечения и плоскостью *ACC*1.

(*ЕГЭ-2016, Д.Р. 10кл.*)

1. В правильной треугольной призме *ABCA*1*B*1*C*1 проведено сечение плоскостью, проходящей через середину *M* ребра *AB*, точку *B*1 и точку *K*, лежащую на ребре *AC* и делящую его в отношении .

а) Докажите, что эта плоскость проходит через середину ребра *A*1*C*1.

б) Найдите площадь сечения, если известно, что сторона основания призмы равна , а высота призмы равна .

(Сб.12, 2019)

1. В правильной треугольной призме *ABCA*1*B*1*C*1 стороны основания равны 16, боковые рёбра равны 11.

а) Докажите, что сечение призмы плоскостью, проходящей через *A*1, *B*1 и середину ребра *BC*, является трапецией.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через вершины *A*1, *B*1 и середину ребра *BC*.

(Сб.5, 2018)

1. В правильной треугольной призме *ABCA*1*B*1*C*1 стороны основания равны 20, боковые рёбра равны 11.

а) Докажите, что сечение призмы плоскостью, проходящей через *A*1, *B*1 и середину ребра *BC*, является трапецией.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через вершины *A*1, *B*1 и середину ребра *BC*.

(Сб.5, 2018)

1. В правильной треугольной призме *ABCA*1*B*1*C*1 сторона основания *AB* равна 6, а боковое ребро *AA*1 равно . На рёбрах *AB*, *A*1*B*1 и *B*1*C*1 отмечены точки *M*, *N* и *K* соответственно, причём *AM* = *B*1*N* = *C*1*K* = 2.

а) Пусть *L* – точка пересечения плоскости *MNK* с ребром *AC*. Докажите, что *MNKL* – квадрат.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью *MNK*.

(***ЕГЭ-2016, досрочная волна****,* Сб.12, 2019, Сб.8, 2020)

1. Дана правильная треугольная призма *ABCA*1*B*1*C*1, в которой сторона основания *AB* = 8, боковое ребро *AA*1 = . Точка *Q –* точка пересечения диагоналей грани *ABB*1*А*1, точки *M*, *N* и *K –* середины *ВС*, *СC*1 и *А*1*C*1 cоответственно.

а) Докажите, что точки *Q*, *M*, *N* и *K* лежат в одной плоскости.

б) Найдите площадь сечения *QMN*.

(***ЕГЭ-2020, резервный день основной волны***) Гущин

1. Точка *M* – середина ребра *B*1*C*1 правильной треугольной призмы *ABCA*1*B*1*C*1 с основаниями *ABC* и *A*1*B*1*C*1. Прямые *BA*1 и *CB*1 перпендикулярны.

а) Докажите, что треугольник *BMA*1 равнобедренный.

б) Найдите объём призмы, если расстояние между прямыми *BA*1 и *CB*1 равно 2.

(Сб.12, 2019)

1. В правильной треугольной призме *ABCA*1*B*1*C*1 все рёбра равны 6. На рёбрах *AA*1 и *CC*1 отмечены точки *M* и *N*, причём *AM* = 2, *CN* = 1.

а) Докажите, что плоскость *MNB*1 разбивает призму на два многогранника, объёмы которых равны.

б) Найдите объём тетраэдра *MNBB*1.

(***ЕГЭ-2016, досрочная волна***) Гущин

1. В правильной треугольной призме *ABCA*1*B*1*C*1 все рёбра равны 8. На рёбрах *AA*1 и *CC*1 отмечены точки *M* и *N*, причём *AM* = 3, *CN* = 1.

а) Докажите, что плоскость *MNB*1 разбивает призму на два многогранника, объёмы которых равны.

б) Найдите объём тетраэдра *MNBB*1.

(***ЕГЭ-2016, досрочная волна***) Гущин

1. В правильной треугольной призме *ABCA*1*B*1*C*1 сторона основания *AB* равна 6, а боковое ребро *AA*1 равно 3. На ребре *B*1*C*1 отмечена точка *L* так, что *B*1*L* = 1. Точки *K* и *M* – середины ребер *AB* и *A*1*C*1 соответственно. Плоскость γ параллельна прямой *AC* и содержит точки *K* и *L*.

а) Докажите, что прямая *BM* перпендикулярна плоскости γ.

б) Найдите объём пирамиды, вершина которой – точка *M*, а основание – сечение данной призмы плоскостью γ.

(***ЕГЭ-2016, основная волна***, Сб.12, 2019)

1. В правильной треугольной призме *ABCA*1*B*1*C*1 сторона *AB* основания равна 6, а боковое ребро *AA*1 равно 3. На рёбрах *AB* и *B*1*C*1 отмечены точки *K* и *L* соответственно, причём *AK* = *B*1*L* = 2. Точка *M −* середина ребра *A*1*C*1. Плоскость γ параллельна прямой *AC* и содержит точки *K* и *L*.

а) Докажите, что прямая *BM* перпендикулярна плоскости γ.

б) Найдите объём пирамиды, вершина которой – точка *M*, а основание – сечение данной призмы плоскостью γ.

(Сб.11, 2020)

1. Дана правильная треугольная призма *ABCA*1*B*1*C*1, в которой *AB* = 1 и *AA*1 = 3. Точки *O* и *O*1 являются центрами окружностей, описанных около треугольников *ABC* и *A*1*B*1*C*1 соответственно. На ребре *CC*1 отмечена точка *M* такая что *CM* = 2.

а) Докажите, что прямая *OO*1 содержит точку пересечения медиан треугольника *ABM*.

б) Найдите объем пирамиды *ABMC*1.

(***ЕГЭ-2020, резервный день основной волны***) Гущин

1. Дана правильная треугольная призма *ABCA*1*B*1*C*1, в которой *AB* = 6 и *AA*1 = 3. Точки *O* и *O*1 являются центрами окружностей, описанных около треугольников *ABC* и *A*1*B*1*C*1 соответственно. На ребре *CC*1 отмечена точка *M* такая что *CM* = 1.

а) Докажите, что прямая *OO*1 содержит точку пересечения медиан треугольника *ABM*.

б) Найдите объем пирамиды *ABMC*1.

(***ЕГЭ-2020, резервный день основной волны***) Гущин

***6. Правильная шестиугольная призма***

1. Дана правильная шестиугольная призма *ABCDEFA*1*B*1*C*1*D*1*E*1*F*1.

а) Докажите, что плоскость *CA*1*F*1 делит ребро *BB*1 пополам.

б) Найдите расстояние от точки *C* до прямой *A*1*F*1, если стороны основания призмы равны 5, а боковые рёбра равны 11.

(Сб.12, 2019)

1. В правильной шестиугольной призме *A…F*1 все рёбра равны 2.

а) Докажите, что плоскость *BB*1*F* перпендикулярна прямой *B*1*C*1.

б) Найдите расстояние от точки *B* до плоскости *FB*1*C*1.

(Сб.8, 2020)

1. Дана правильная шестиугольная призма *ABCDEFA*1*B*1*C*1*D*1*E*1*F*1.

а) Докажите, что плоскость *ADC*1 перпендикулярна плоскости *FBB*1.

б) Найдите расстояние от точки *C* до плоскости *ADC*1, если *AA*1 = 4, а косинус угла между прямой *AC*1 и плоскостью *ABC* равен .

(Сб.12, 2019)

1. Дана правильная шестиугольная призма *ABCDEFA*1*B*1*C*1*D*1*E*1*F*1 со стороной основания  и боковым ребром 1.

а) Докажите, что плоскости *ACA*1 и *B*1*CE*1 перпендикулярны.

б) Найдите угол между прямыми *BF*1 и *CD*1.

(Сб.12, 2019)

1. Дана правильная шестиугольная призма *ABCDEFA*1*B*1*C*1*D*1*E*1*F*1.

а) Докажите, что плоскости *AB*1*F* и *ACC*1 перпендикулярны.

б) Найдите угол между прямыми *AB*1 и *CF*1, если *AA*1 = *AB*.

(Сб.12, 2019)

1. Дана правильная шестиугольная призма *ABCDEFA*1*B*1*C*1*D*1*E*1*F*1 с основаниями *ABCDEF* и *A*1*B*1*C*1*D*1*E*1*F*1, *P* – точка пересечения прямой *CB*1 с плоскостью *AA*1*F*1.

а) Докажите, что *B*1 − середина отрезка *CP*.

б) Найдите угол между прямыми *BA*1 и *CB*1, если боковое ребро призмы вдвое больше стороны основания.

(Сб.12, 2019)

1. В правильной шестиугольной призме *ABCDEFA*1*B*1*C*1*D*1*E*1*F*1 все рёбра равны 1.

а) Докажите, что плоскости *AA*1*D*1 и *DB*1*F*1 перпендикулярны.

б) Найдите тангенс угла между плоскостями *ABC* и *DB*1*F*1.

(Сб.3, 2018)

1. Дана правильная шестиугольная призма *ABCDEFA*1*B*1*C*1*D*1*E*1*F*1 со стороной основания  и боковым ребром 1.

а) Докажите, что плоскости *ACA*1 и *B*1*CE*1 перпендикулярны.

б) Найдите угол между плоскостями *B*1*CE*1 и *ABC*.

(Сб.12, 2019)

1. В правильной шестиугольной призме *ABCDEFA*1*B*1*C*1*D*1*E*1*F*1 стороны основания равны 5, а боковые рёбра равны 11.

а) Докажите, что прямые *CA*1 и *C*1*D*1 перпендикулярны.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через вершины *C*, *A*1 и *F*1.

(Сб.3, 2018) Гущин

1. Дана правильная шестиугольная призма *ABCDEFA*1*B*1*C*1*D*1*E*1*F*1. Плоскость α проходит через сторону основания и противолежащую ей сторону другого основания.

а) Докажите, что плоскость α проходит через середины двух противоположных боковых рёбер призмы.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью α, если боковые грани призмы – квадраты со стороной 2.

(Сб.12, 2019)

***7. Прямая призма***

1. Основанием прямой четырёхугольной призмы *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1 является квадрат *ABCD* со стороной , высота призмы равна . Точка *K* – середина ребра *BB*1. Через точки *K* и *C*1 проведена плоскость α, параллельная прямой *BD*1.

а) Докажите, что сечение призмы плоскостью α является равнобедренным треугольником.

б) Найдите периметр треугольника, являющегося сечением призмы плоскостью α.

(***ЕГЭ-2015, резервный день досрочной волны***)

1. Основанием прямой четырёхугольной призмы *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1 является квадрат *ABCD* со стороной , высота призмы равна . Точка *K* – середина ребра *BB*1. Через точки *K* и *C*1 проведена плоскость α, параллельная прямой *BD*1.

а) Докажите, что сечение призмы плоскостью α является равнобедренным треугольником.

б) Найдите периметр треугольника, являющегося сечением призмы плоскостью α.

(***ЕГЭ-2015, резервный день досрочной волны***)

1. Основание прямой четырёхугольной призмы *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1 − прямоугольник *ABCD*, в котором *AB*= 12, *AD* =. Расстояние между прямыми *AC* и *B*1*D*1 равно 5.

а) Докажите, что плоскость, проходящая через точку *D* перпендикулярно прямой *BD*1, делит отрезок *BD*1 в отношении , считая от вершины *D*1.

б) Найдите косинус угла между плоскостью, проходящей через точку *D* перпендикулярно прямой *BD*1, и плоскостью основания призмы.

(Сб.3, Сб.4, 2018)

1. Основание прямой четырёхугольной призмы *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1 − прямоугольник *ABCD*, в котором *AB*= 12, *AD* =. Расстояние между прямыми *AC* и *B*1*D*1 равно 5.

а) Докажите, что плоскость, проходящая через точку *D* перпендикулярно прямой *BD*1, делит отрезок *B*1*D*1 в отношении .

б) Найдите косинус угла между плоскостью, проходящей через точку *D* перпендикулярно прямой *BD*1, и плоскостью основания призмы.

(Сб.7, 2020)

1. Основание прямой четырёхугольной призмы *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1 − прямоугольник *ABCD*, в котором *AB*= 5, *AD* =. Расстояние между прямыми *AC* и *B*1*D*1 равно 12.

а) Пусть плоскость, проходящая через точку *D* перпендикулярно прямой *BD*1, пересекает прямую *B*1*D*1 в точке *M*. Докажите, что .

б) Найдите тангенс угла между плоскостью, проходящей через точку *D* перпендикулярно прямой *BD*1, и плоскостью основания призмы.

(Сб.7, 2020)

1. Основание прямой четырёхугольной призмы *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1 − прямоугольник *ABCD*, в котором *AB*= 5, *AD* =. Расстояние между прямыми *A*1*C*1 и *BD* равно .

а) Докажите, что плоскость, проходящая через точку *D* перпендикулярно прямой *BD*1, делит отрезок *D*1*B*1 в отношении .

б) Найдите тангенс угла между плоскостью, проходящей через точку *D* перпендикулярно прямой *BD*1, и плоскостью основания призмы.

(Сб.7, 2020)

1. Основание прямой четырёхугольной призмы *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1 − прямоугольник *ABCD*. Плоскость α проходит через середину ребра *AD* перпендикулярно прямой *BD*1,

а) Докажите, что угол между плоскостью α и плоскостью *ABC* равен углу между прямыми *BD*1 и *AA*1.

б) Найдите косинус угла между плоскостью основания призмы и плоскостью α, если *AB*= 12, *AD*=, а расстояние между прямыми *AC* и *B*1*D*1 равно 5.

(Сб.12, 2019)

1. Основание прямой четырёхугольной призмы *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1 − прямоугольник *ABCD*. Плоскость α проходит через середину ребра *CD* перпендикулярно прямой *B*1*D*,

а) Докажите, что угол между плоскостью α и плоскостью *ADD*1 равен углу между прямыми *B*1*D* и *AB*.

б) Найдите тангенс угла между плоскостью *ADD*1 и плоскостью α, если *AB*= 5, *AD* =, а расстояние между прямыми *A*1*C*1 и *BD* равно .

(Сб.12 2019)

1. Основание прямой треугольной призмы *ABCA*1*B*1*C*1 – треугольник *ABC*, в котором *AB* = *AC* = 8, а один из углов равен 60°. На ребре *AA*1 отмечена точка *P* так, что . Расстояние между прямыми *AB* и *B*1*C*1 равно .

а) Докажите, что основания высот треугольников *ABC* и *PBC*, проведённых к стороне *BC*, совпадают.

б) Найдите тангенс угла между плоскостями *ABC* и *CBP*.

(Сб.8, 2020)

1. Основание прямой треугольной призмы *ABCA*1*B*1*C*1 – равнобедренный прямоугольный треугольник с катетами *AC = BC*. Вершины *M* и *N* правильного тетраэдра *MNPQ* лежит на прямой *CA*1, а вершины *P* и *Q* – на прямой *AB*1.

а) Докажите, что *AA*1 = *AC*.

б) Найдите расстояние между серединами отрезков *MN* и *PQ*, если *AC* = *a*.

(Сб.12, 2019)

1. В основании прямой треугольной призмы *ABCA*1*B*1*C*1 лежит прямоугольный треугольник *ABC* с прямым углом *C*, *AC* = 4, *BC* = 16, *AA*1 = . Точка *Q* – середина ребра *A*1*B*1, а точка *P* делит ребро *B*1*C*1 в отношении , считая от вершины *C*1. Плоскость *APQ* пересекает ребро *CC*1 в точке *M*.

а) Докажите, что точка *M* является серединой ребра *CC*1.

б) Найдите расстояние от точки *A* до плоскости *APQ*.

(***ЕГЭ-2016***) Гущин

1. Основание прямой призмы *ABCA*1*B*1*C*1 – равнобедренный прямоугольный треугольник *ABC* с прямым углом при вершине *C*. Точка *M* – середина ребра *AB*. Известно, что *AB* = 2*AA*1.

а) Докажите, что прямые *A*1*C* и *MB*1 перпендикулярны.

б) Найдите угол между прямыми *AC*1 и *MB*1.

(Сб.12, 2019)

1. Основанием прямой треугольной призмы *ABCA*1*B*1*C*1 является прямоугольный треугольник *ABC* с прямым углом *C*, а боковая грань *ACC*1*A*1 является квадратом.

а) Докажите, что прямые *CA*1 и *AB*1 перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между прямыми *CA*1 и *AB*1, если *AC* = 1 и *BC* = 4.

(***ЕГЭ-2017, основная волна***, Сб.12, 2019)

1. Основанием прямой треугольной призмы *ABCA*1*B*1*C*1 является прямоугольный треугольник *ABC* с прямым углом *C*. Грань *ACC*1*A*1 является квадратом.

а) Докажите, что прямые *CA*1 и *AB*1 перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между прямыми *CA*1 и *AB*1, если *AC* = 4 и *BC* = 7.

(***ЕГЭ-2017, основная волна***) Гущин

1. Основанием прямой треугольной призмы *ABCA*1*B*1*C*1 является прямоугольный треугольник *ABC* с прямым углом *C*. Прямые *CA*1 и *AB*1 перпендикулярны.

а) Докажите, что .

б) Найдите расстояние между прямыми *CA*1 и *AB*1, если *BC* = 8 и *AC* = 7.

(***ЕГЭ-2017, основная волна***, Сб.12, 2019) Гущин

1. Основание прямой треугольной призмы *ABCA*1*B*1*C*1 – прямоугольный треугольник *ABC* с прямым углом при вершине *A*, а боковая грань *AA*1*C*1*C* – квадрат.

а) Докажите, что прямые *CB*1 и *AC*1 перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между этими прямыми, если *AC* = 2, *AB*1 =.

(Сб.12, 2019)

1. Дана прямая призма *ABCA*1*B*1*C*1, основание которой – прямоугольный треугольник *ABC* с прямым углом *C* и катетом *BC*, вдвое большим бокового ребра призмы. Точка *M* – середина ребра *A*1*C*1, точка *N* лежит на ребре *BC*, причём .

а) Докажите, что .

б) Найдите угол между прямой *MN* и плоскостью основания *A*1*B*1*C*1, если .

(Сб.12, 2019)

1. В основании прямой призмы *ABCA*1*B*1*C*1 лежит прямоугольный треугольник *ABC* с прямым углом *C*. Точка *M* – середина ребра *B*1*C*1, точка *N* лежит на ребре *AC*, причём . Катет *AC* втрое больше бокового ребра *AA*1 призмы.

а) Докажите, что прямая *MN* перпендикулярна прямой *CA*1.

б) Найдите угол между прямой *MN* и плоскостью основания *A*1*B*1*C*1, если sin∠*CBA*=.

(Сб.2, Сб.3, Сб.4, 2020)

1. В основании прямой призмы *ABCA*1*B*1*C*1 лежит прямоугольный треугольник *ABC* с прямым углом *C*. Точка *M* – середина ребра *B*1*C*1, точка *N* лежит на ребре *AC*, причём . Катет *AC* вдвое больше бокового ребра *AA*1 призмы.

а) Докажите, что прямая *MN* перпендикулярна прямой *CA*1.

б) Найдите угол между прямой *MN* и плоскостью основания *A*1*B*1*C*1, если sin∠*CBA*=.

(Сб.2, Сб.3, Сб.4, 2020)

1. В основании прямой призмы *ABCA*1*B*1*C*1 лежит прямоугольный треугольник *ABC* с прямым углом *C*. Точка *M* – середина ребра *B*1*C*1, точка *N* лежит на ребре *AC*, причём . Катет *AC* вдвое больше бокового ребра *AA*1 призмы.

а) Докажите, что прямая *MN* перпендикулярна прямой *CA*1.

б) Найдите угол между прямой *MN* и плоскостью основания *A*1*B*1*C*1, если cos∠*CBA*=.

(Сб.4, 2020)

1. В основании прямой призмы *ABCA*1*B*1*C*1 лежит прямоугольный треугольник *ABC* с прямым углом *C*. Точка *M* – середина ребра *B*1*C*1, точка *N* лежит на ребре *AC*, причём . Катет *AC* в четыре раза больше бокового ребра *AA*1 призмы.

а) Докажите, что прямая *MN* перпендикулярна прямой *CA*1.

б) Найдите угол между прямой *MN* и плоскостью основания *A*1*B*1*C*1, если cos∠*CBA*=.

(Сб.2, Сб.3, Сб.4, 2020)

1. Основанием прямой треугольной призмы *ABCA*1*B*1*C*1 является прямоугольный треугольник *ABC* с прямым углом *C*. Диагонали боковых граней *AA*1*B*1*B* и *BB*1*C*1*C* равны 15 и 9 соответственно, *AB*= 13.

а) Докажите, что треугольник *BA*1*C*1 прямоугольный.

б) Найдите объём пирамиды *AA*1*C*1*B*.

(***ЕГЭ-2017, основная волна***, Сб.12, 2019) Гущин

1. Дана прямая треугольная призма *ABCA*1*B*1*C*1. Известно, что *AB* = *BC*. Точка *K –* середина ребра *A*1*B*1, а точка *M* лежит на ребре *AC* и делит его в отношении *AM* : *MC* =1:3.

а) Докажите, что прямая *KM* перпендикулярна прямой *AC*.

б) Найдите расстояние между прямыми *KM* и *A*1*C*1, если *AB* = 6, *AC* = 8 и *AA*1 = 3.

(*ЕГЭ-2020, Т.Р.*)

1. Дана прямая треугольная призма *ABCA*1*B*1*C*1. Известно, что *AB* = *BC*. Точка *K –* середина ребра *A*1*B*1, а точка *M* лежит на ребре *AC* и делит его в отношении *AM* : *MC* =1:3.

а) Докажите, что прямая *KM* перпендикулярна прямой *AC*.

б) Найдите расстояние между прямыми *KM* и *A*1*C*1, если *AB* = 10, *AC* = 8 и *AA*1 = 3.

(*ЕГЭ-2020, Т.Р.*)

1. В основании прямой треугольной призмы *ABCA*1*B*1*C*1 лежит равнобедренный треугольник *ABC* с равными сторонами *AB* и *BC*. Точки *K* и *M –* середины рёбер *A*1*B*1 и *AC* соответственно.

а) Докажите, что *KM* = *KB*.

б) Найдите угол между прямой *KM* и плоскостью *ABB*1, если *AB* = 8, *AC* = 6 и *AA*1 = 3.

(*ЕГЭ-2020, Т.Р.*)

1. В основании прямой треугольной призмы *ABCA*1*B*1*C*1 лежит равнобедренный треугольник *ABC* с основанием *AC*. Точка *K* – середина ребра *A*1*B*1, а точка *M* делит ребро *AC* в отношении .

а) Докажите, что *KM* перпендикулярно *AC*.

б) Найдите угол между прямой *KM* и плоскостью *ABC*, если *AB* = 6, *AC* = 8, *AA*1 = 3.

(*ЕГЭ-2020, Т.Р., ЕГЭ-2020, 2019, Т.Р. 10-11кл., ЕГЭ-2017, Т.Р. 10кл.*)

1. В основании прямой треугольной призмы *ABCA*1*B*1*C*1 лежит равнобедренный треугольник *ABC* с основанием *AC*. Точка *K* – середина ребра *A*1*B*1, а точка *M* делит ребро *AC* в отношении .

а) Докажите, что *KM* перпендикулярно *AC*.

б) Найдите угол между прямой *KM* и плоскостью *ABC*, если *AB* = 12, *AC* = 16, *AA*1 = 6.

(*ЕГЭ-2020, 2019, Т.Р. 10-11кл., ЕГЭ-2017, Т.Р. 10кл.*)

1. В основании прямой треугольной призмы *ABCA*1*B*1*C*1 лежит равнобедренный треугольник *ABC* с основанием *AC*. Точка *K* – середина ребра *A*1*B*1, а точка *M* делит ребро *AC* в отношении .

а) Докажите, что *KM* перпендикулярно *AC*.

б) Найдите угол между прямой *KM* и плоскостью *ABB*1, если *AB* = 8, *AC* = 12, *AA*1 = 5.

(Сб.4, 2020, Сб.3, 2019)

1. В основании прямой треугольной призмы *ABCA*1*B*1*C*1 лежит равнобедренный треугольник *ABC* с основанием *AC*. Точка *K* – середина ребра *A*1*B*1, а точка *M* делит ребро *AC* в отношении .

а) Докажите, что *KM* перпендикулярно *AC*.

б) Найдите угол между прямой *KM* и плоскостью *ABB*1, если *AB* = 5, *AC* = 8, *AA*1 = 4.

(Сб.1, Сб.4, 2020, Сб.2, Сб.3, 2019)

1. Основанием прямой треугольной призмы *ABCA*1*B*1*C*1 является равнобедренный треугольник *ABC*, в котором *AB* = *BC* = 20, *AC* = 32. Боковое ребро призмы равно 24. Точка *P* принадлежит ребру *BB*1, причём *BP*: *PB*1 = 1:3.

а) Пусть *M* – середина *A*1*C*1. Докажите, что прямые *MP* и *AC* перпендикулярны.

б) Найдите тангенс угла между плоскостями *A*1*B*1*C*1 и *ACP*.

(Сб.2, Сб.3, Сб.4, Сб.7, 2020)

1. Основанием прямой треугольной призмы *ABCA*1*B*1*C*1 является равнобедренный треугольник *ABC*, в котором *AB* = *BC* = 10, *AC* = 16. Боковое ребро призмы равно 24. Точка *P* – середина ребра *BB*1.

а) Пусть *M* – середина *AC*. Докажите, что прямые *MP* и *A*1*C*1 перпендикулярны.

б) Найдите тангенс угла между плоскостями *A*1*B*1*C*1 и *ACP*.

(Сб.7, 2020)

1. Основание прямой треугольной призмы *ABCA*1*B*1*C*1 – треугольник *ABC*, в котором *AB* = *BC* = 10, *AC* = 16. Боковое ребро призмы равно 12. На ребре *BB*1 отмечена точка *P* так, что *PB*1 = 3*PB*.

а) Докажите, что основания высот треугольников *ACP* и *ACB*1, проведённых к стороне *AC*, совпадают.

б) Найдите тангенс угла между плоскостями *ACP* и *ACC*1.

(Сб.8, 2020)

1. Точки *M* и *N* – середины боковых рёбер соответственно *AA*1 и *CC*1 прямой призмы *ABCA*1*B*1*C*1.

а) Докажите, что отрезок, соединяющий вершину *B*1 с серединой ребра *AC*, делится плоскостью *BMN* в отношении , считая от точки *B*1.

б) Найдите угол между плоскостями *AA*1*C*1 и *MBN*, если *AB* = *BC* = 15, *AC* = 24 и *AA*1 = 144.

(Сб.12, 2019)

1. Дана прямая призма *ABCA*1*B*1*C*1. Плоскость, проходящая через центр основания *A*1*B*1*C*1 и середину *K* ребра *BC*, параллельна прямой *AB*. Эта плоскость пересекает прямую *CC*1 в точке *L*.

а) Докажите, что *CL* = 3*CC*1.

б) Найдите угол между прямыми *KL* и *AC*1, если ∠*ACB* = 90° и *AA*1 = *AC* =*BC*.

(Сб.12, 2019)

1. Основание прямой призмы *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1 − ромб *ABCD* с углом 120° при вершине *D*, а боковые грани призмы – квадраты.

а) Докажите, что прямые *A*1*C* и *BD* перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между этими прямыми, если сторона основания призмы равна .

(Сб.12, 2019)

1. Основанием прямой четырёхугольной призмы *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1 является ромб *ABCD*, *AB* = *AA*1.

а) Докажите, что прямые *A*1*C* и *BD* перпендикулярны.

б) Найдите объём призмы, если *A*1*C* = *BD* = 2.

(***ЕГЭ-2017, резервный день основной волны***, Сб.12, 2019) Гущин

1. Основание *ABCD* прямой призмы *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1 – ромб с острым углом 60° при вершине *A*. Точка *M* – середина ребра *CD*, точка *H* лежит на стороне *AB*, причём *DH* – высота ромба *ABCD*.

а) Докажите, что .

б) Найдите угол между прямыми *MD*1 и *BC*1, если ∠*ABA*1 = 60°.

(Сб.12, 2019)

1. Основание прямой призмы *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1 – равнобедренная трапеция *ABCD* с основаниями *AD*= 2*BC* и боковой стороной *AB* = *BC*.

а) Докажите, что .

б) Найдите угол между прямыми *CD*1 и *DB*1, если боковая грань *AA*1*D*1*D* – квадрат.

(Сб.12, 2019)

***8. Наклонная призма***

1. Основание наклонной призмы *ABCA*1*B*1*C*1 – равносторонний треугольник *ABC*. Боковые грани *AA*1*B*1*B* и *AA*1*C*1*C* – равные ромбы с острым углом при общей вершине *A*.

а) Докажите, что боковая грань *BB*1*C*1*C* – квадрат.

б) Найдите расстояние от вершины *A* до плоскости *BB*1*C*1, если ∠*CAA*1 = 60°, а сторона основания призмы равна .

(Сб.12, 2019)

1. Основание *ABC* треугольной призмы *ABCA*1*B*1*C*1 – равносторонний треугольник *ABC*. Ортогональная проекция вершины *C*1 на плоскость *ABC* совпадает с центром треугольника *ABC*.

а) Докажите, что грань *AA*1*B*1*B*– прямоугольник.

б) Найдите расстояние между прямыми *AA*1 и *BC*, все рёбра призмы равны 3.

(Сб.12, 2019)

1. Основания призмы *ABCA*1*B*1*C*1 – равносторонние треугольники. Точки *M* и *M*1 – центры оснований *ABC* и *A*1*B*1*C*1 соответственно.

а) Докажите, что угол между прямыми *BM*и *C*1*M*1 равен 60°.

б) Найдите угол между прямыми *BM*1 и *C*1*M*, если призма прямая и .

(Сб.12, 2019)

1. Основания *ABC* и *A*1*B*1*C*1 призмы *ABCA*1*B*1*C*1 – равносторонние треугольники. Отрезок, соединяющий центр *O* основания *ABC* с серединой ребра *A*1*B*1, перпендикулярен основаниям призмы.

а) Докажите, что грань *AA*1*B*1*B*– прямоугольник.

б) Найдите угол между прямой *BC* и плоскостью *ABC*1, если высота призмы равна стороне основания.

(Сб.12, 2019)

1. Основания *ABC* и *A*1*B*1*C*1 призмы *ABCA*1*B*1*C*1 – равносторонние треугольники. Отрезок, соединяющий центр *O* основания *ABC* с вершиной *C*1, перпендикулярен основаниям призмы.

а) Докажите, что плоскости *ABC*1 и *OCC*1 перпендикулярны.

б) Найдите угол между прямой *AA*1 и плоскостью *ABC*1, если боковое ребро призмы равно стороне основания.

(Сб.12, 2019)

1. Точки *K* и *M* – середины рёбер соответственно *AB* и *B*1*C*1 треугольной призмы *ABCA*1*B*1*C*1, точка *L* лежит на ребре *CC*1, причём .

а) Пусть точка *N* – точка пересечения плоскости *KLM* с ребром *AC*. Докажите, что .

б) Найдите угол между прямой *MN* и плоскостью *BB*1*C*1, если призма правильная и.

(Сб.12, 2019)

1. Дана треугольная призма *ABCA*1*B*1*C*1. Плоскость α проходит через прямую *BC*1 параллельно прямой *AB*1.

а) Докажите, что плоскость α проходит через середину ребра *AC*.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью α, если призма правильная, сторона её основания равна , а боковое ребро равно 1.

(Сб.12, 2019)

1. Точки *M* и *N* – середины рёбер соответственно *CC*1 и *B*1*C*1 треугольной призмы *ABCA*1*B*1*C*1 c основаниями *ABC* и *A*1*B*1*C*1.

а) Докажите, что плоскость *BA*1*M* делит отрезок *AN* в отношении , считая от точки *A*.

б) В каком отношении плоскость *BA*1*M* делит объём призмы?

(Сб.12, 2019)

1. Основания шестиугольной призмы *ABCDEFA*1*B*1*C*1*D*1*E*1*F*1 – правильные шестиугольники. Точки *K*, *L* и *M* – середины рёбер *EF*, *CD* и *BB*1 соответственно.

а) Докажите, что плоскость *KLM* делит ребро *FF*1 в отношении , считая от точки *F*.

б) Найдите расстояние от центра основания *A*1*B*1*C*1*D*1*E*1*F*1 до плоскости *KLM*, если призма правильная, *AB* = 1 и *AA*1 =.

(Сб.12, 2019)

1. Основание шестиугольной призмы *ABCDEFA*1*B*1*C*1*D*1*E*1*F*1 – правильный шестиугольник *ABCDEF* с центром *O*. Отрезок *OA*1 – высота призмы.

а) Докажите, что плоскость *FF*1*E* перпендикулярна плоскости основания призмы.

б) Найдите расстояние от точки *A* до плоскости *BCC*1, если сторона основания призмы равна .

(Сб.12, 2019)

1. Основания шестиугольной призмы *ABCDEFA*1*B*1*C*1*D*1*E*1*F*1 – правильные шестиугольники.

а) Докажите, что диагонали *AD*1, *BE*1 и *CF*1 призмы пересекаются в одной точке.

б) Найдите угол между прямыми *DA*1 и *BC*1, если призма правильная и *AA*1 = *AB*.

(Сб.12, 2019)

1. Основания шестиугольной призмы *ABCDEFA*1*B*1*C*1*D*1*E*1*F*1 – правильные шестиугольники. Точка *M*– середина ребра *BB*1.

а) Докажите, что прямые *F*1*M* и *CD* пересекаются точке, лежащей на прямой *BF*.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью *DMF*1, если призма правильная, сторона её основания равна 1, а высота равна 3.

(Сб.12, 2019)

1. Основания шестиугольной призмы *ABCDEFA*1*B*1*C*1*D*1*E*1*F*1 – правильные шестиугольники. Точка *K*– середина ребра *CC*1.

а) Докажите, что плоскость *ED*1*K* делит ребро *BC* в отношении , считая от точки *B*.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью *ED*1*K*, если призма правильная, сторона её основания равна , а высота равна 6.

(Сб.12, 2019)

1. Основания *ABCDEF* и *A*1*B*1*C*1*D*1*E*1*F*1 шестиугольной призмы *ABCDEFA*1*B*1*C*1*D*1*E*1*F*1 – правильные шестиугольники, *M* – точка пересечения *BD* и *FC*.

а) Докажите, что плоскость *BDF*1 делит отрезок ребро *FC*1 в отношении , считая от точки *F*.

б) В каком отношении плоскость *BDF*1 делит объём призмы?

(Сб.12, 2019)

1. Основание *ABCD* призмы *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1 – равнобедренная трапеция с основаниями *AB* и *CD*. Боковые стороны равны меньшему основанию *CD*, а их продолжения пересекаются под углом 60°.

а) Плоскость *CA*1*D*1 пересекает ребро *AB* в точке *M*. Докажите, что прямая *D*1*M* проходит через середину диагонали *A*1*C*.

б) Найдите угол между боковым ребром *BB*1 и плоскостью *CA*1*D*1, если призма прямая, а .

(Сб.12, 2019)

1. Основание *ABCD* призмы *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1 – трапеция с основаниями *AB* = 2*CD*.

а) Докажите, что плоскость *BA*1*D*1 проходит через середину бокового ребра *CC*1.

б) Найдите угол между боковым ребром *AA*1 и этой плоскостью, если призма прямая, трапеция *ABCD* – прямоугольная с прямым углом при вершине *B*, а *BC* = *AD* и *AA*1 =*CD*.

(Сб.12, 2019)

***9. Правильная треугольная пирамида***

1. В правильной пирамиде *SABC* точки *M* и *N* − середины рёбер *AB* и *BC* соответственно. На боковом ребре *SA* отмечена точка *K*. Сечение пирамиды плоскостью *MNK* является четырёхугольником, диагонали которого пересекаются в точке *Q*.

а) Докажите, что точка *Q* лежит на высоте пирамиды.

б) Найдите *QP*, где *P* – точка пересечения плоскости *MNK* и ребра *SC*, если *AB* = *SK* = 6 и *SA* = 8.

(***ЕГЭ-2018, основная волна***, Сб.12, 2019)

1. Все рёбра правильной треугольной пирамиды *SBCD* с вершиной *S* равны 9. Основание *O* высоты *SO* этой пирамиды является серединой отрезка *SS*1, *M* – середина ребра *SB*, точка *L* лежит на ребре *CD* так, что .

а) Докажите, что сечение пирамиды *SBCD* плоскостью *S*1*LM* – равнобокая трапеция.

б) Вычислите длину средней линии этой трапеции.

(*ЕГЭ-2020, 2016, Т.Р.*)

1. Все рёбра правильной треугольной пирамиды *SBCD* с вершиной *S* равны 18. Основание *O* высоты *SO* этой пирамиды является серединой отрезка *SS*1, *M* – середина ребра *SB*, точка *L* лежит на ребре *CD* так, что .

а) Докажите, что сечение пирамиды *SBCD* плоскостью *S*1*LM* – равнобокая трапеция.

б) Вычислите длину средней линии этой трапеции.

(*ЕГЭ-2020, 2016, Т.Р.*)

1. В правильной треугольной пирамиде *SABC* с вершиной *S*, все рёбра которой равны 4, точка *N −*середина ребра *AC*, точка *O* – центр основания пирамиды, точка *P* делит отрезок *SO* в отношении , считая от вершины пирамиды.

а) Докажите, что прямая *NP* перпендикулярна прямой *BS*.

б) Найдите расстояние от точки *B* до прямой *NP*.

(Сб.7, 2020)

1. В правильной треугольной пирамиде *SABC* сторона основания *AB* равна 30, а боковое ребро *SA* равно 28. Точки *M* и *N* − середины рёбер *SA* и *SB* соответственно. Плоскость α содержит прямую *MN* и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

а) Докажите, что плоскость α делит медиану *CE* в отношении , считая от точки *C*.

б) Найдите расстояние от вершины *A* до плоскости α.

(***ЕГЭ-2015, резервный день основной волны***)

1. В правильной треугольной пирамиде *SABC* сторона основания *AB* равна 60, а боковое ребро *SA* равно 37. Точки *M* и *N* − середины рёбер *SA* и *SB* соответственно. Плоскость α содержит прямую *MN* и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

а) Докажите, что плоскость α делит медиану *CE* в отношении , считая от точки *C*.

б) Найдите расстояние от вершины *A* до плоскости α.

(***ЕГЭ-2015, резервный день основной волны***, Сб.6, Сб.9, 2019, Сб.11, 2017)

1. Основанием правильной треугольной пирамиды *MABC* служит треугольник *ABC* со стороной 6. Ребро *MA* перпендикулярно грани *MBC*. Через вершину пирамиды *M* и середины рёбер *AC* и *BC* проведена плоскость α.

а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью α является равносторонним треугольником.

б) Найдите расстояние от вершины *C* до плоскости α.

(Сб.2, Сб.3, Сб.4, 2020, Сб.3, 2019)

1. Основанием правильной треугольной пирамиды *MABC* служит треугольник *ABC* со стороной . Ребро *MA* перпендикулярно грани *MBC*. Через вершину пирамиды *M* и середины рёбер *AC* и *BC* проведена плоскость α.

а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью α является равносторонним треугольником.

б) Найдите расстояние от вершины *A* до плоскости α.

(Сб.2, Сб.3, Сб.4, 2020)

1. Основанием правильной треугольной пирамиды *MABC* служит треугольник *ABC* со стороной . Ребро *MA* перпендикулярно грани *MBC*. Через вершину пирамиды *M* и середины рёбер *AC* и *BC* проведена плоскость α.

а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью α является равносторонним треугольником.

б) Найдите расстояние от вершины *B* до плоскости α.

(Сб.4, 2020, Сб.3, 2019)

1. Дана правильная треугольная пирамида *SABC*. Её боковое ребро *BS* равно 9, высота *SH* пирамиды равна . Точка *M* – середина ребра *BC*, а точка *T* – середина отрезка *SM*.

а) Докажите, что *AT* – высота пирамиды, проведённая к грани *SBC*.

б) Найдите расстояние между прямыми *AT* и *SB*.

(Сб.8, 2020)

1. Дана правильная треугольная пирамида *SABC*. Её боковое ребро *BS* равно , высота *SH* пирамиды равна . Точка *M* – середина ребра *BC*, а точка *T* – середина отрезка *SM*.

а) Докажите, что *AT* – высота пирамиды, проведённая к грани *SBC*.

б) Найдите расстояние между прямыми *AT* и *SB*.

(Сб.8, 2020)

1. Дана правильная треугольная пирамида *DABC* с вершиной *D*.

а) Докажите, что её сечение плоскостью, проходящей через середину ребра *AB* параллельно прямым *AD* и *BC*, – прямоугольник.

б) Найдите расстояние между противоположными рёбрами, если сторона основания равна , а боковое ребро равно 10.

(Сб.12, 2019)

1. В правильной треугольной пирамиде *SABC* сторона основания , а боковое ребро *SA* = 2. На рёбрах *AB* и *SC* отмечены точки *K* и *M* соответственно, причём . Плоскость α содержит прямую *KM* и параллельна *SA*.

а) Докажите, что плоскость α делит ребро *AC* в отношении , считая от вершины *A*.

б) Найдите расстояние между прямыми *SA* и *KM*.

(***ЕГЭ-2019, основная волна***) Гущин

1. В правильной треугольной пирамиде *SABC* сторона основания , а боковое ребро *SA* = 3. На рёбрах *AB* и *SC* отмечены точки *K* и *M* соответственно, причём . Плоскость α содержит прямую *KM* и параллельна *SA*.

а) Докажите, что плоскость α делит ребро *AC* в отношении , считая от вершины *A*.

б) Найдите расстояние между прямыми *SA* и *KM*.

(***ЕГЭ-2019, основная волна***) Гущин

1. В правильном тетраэдре *ABCD* точка *H* – центр грани *ABC*, а точка *M* – середина ребра *CD*.

а) Докажите, что прямые *AB* и *CD* перпендикулярны.

б) Найдите угол между прямыми *DH* и *BM*.

(***ЕГЭ-2018***) Гущин

1. Точка *M* – середина ребра *AB* правильного тетраэдра *DABC*.

а) Докажите, что ортогональная проекция точки *M* на плоскость *ACD* лежит на медиане *AP* грани *ACD*.

б) Найдите угол между прямой *DM* и плоскостью *ACD*.

(Сб.12, 2019)

1. В правильной треугольной пирамиде *SABC* с основанием *ABC* известны рёбра *AB* =, *SC* = 13.

а) Докажите, что прямая, проходящая через середины рёбер *AS* и *BC*, пересекает высоту пирамиды.

б) Найдите угол, образованный плоскостью основания и прямой, проходящей через середины рёбер *AS* и *BC*.

(Сб.5, 2018)

1. Дана правильная пирамида *SABC*, у которой сторона основания , а боковое ребро *SA* = 9. Сечение пирамиды, параллельное рёбрам *AC* и *SB*, является квадратом.

а) Докажите, что это сечение делит рёбра *AS*, *CS*, *CB* и *AB* в равном отношении.

б) Найдите угол между диагональю этого квадрата и плоскостью основания пирамиды.

(Сб.5, 2018)

1. Основанием правильной треугольной пирамиды *MABC* служит треугольник *ABC* со стороной 6. Ребро *MA* перпендикулярно грани *MBC*. Через вершину пирамиды *M* и середины рёбер *AC* и *BC* проведена плоскость α.

а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью α является равносторонним треугольником.

б) Найдите угол между плоскостью α и ребром *MC*.

(Сб.4, 2020, Сб.3, 2019)

1. В правильной пирамиде *SABC* точки *M* и *N* − середины рёбер *AB* и *BC* соответственно. На боковом ребре *SA* отмечена точка *K*. Сечение пирамиды плоскостью *MNK* является четырёхугольником, диагонали которого пересекаются в точке *Q*.

а) Докажите, что точка *Q* лежит на высоте пирамиды.

б) Найдите угол между плоскостями *MNK* и *ABC*, если *AB* = 6, *SA* = 12, *SK* = 3.

(***ЕГЭ-2018, основная волна***, Сб.12, 2019)

1. В правильной треугольной пирамиде *SABC* с основанием *ABC* боковое ребро равно 7, а сторона основания равна 6. На продолжении ребра *SA* за точку *A* отмечена точка *P*, а на продолжении ребра *SB* за точку *B* – точка *Q*, причём *AP* = *BQ* = *SA*.

а) Докажите, что прямые *PQ* и *SC* перпендикулярны друг другу.

б) Найдите угол между плоскостями *ABC* и *CPQ*.

(*ЕГЭ-2018, Т.Р.*)

1. В правильной треугольной пирамиде *SABC* с основанием *ABC* боковое ребро равно 6, а сторона основания равна 4. На продолжении ребра *SA* за точку *A* отмечена точка *P*, а на продолжении ребра *SB* за точку *B* – точка *Q*, причём *AP* = *BQ* = *SA*.

а) Докажите, что прямые *PQ* и *SC* перпендикулярны друг другу.

б) Найдите угол между плоскостями *ABC* и *CPQ*.

(*ЕГЭ-2018, Т.Р.*)

1. В правильной треугольной пирамиде *SABC* с вершиной *S*, все рёбра которой равны 2, точка *M −*середина ребра *AB*, точка *O* – центр основания пирамиды, точка *F* делит отрезок *SO* в отношении , считая от вершины пирамиды.

а) Докажите, что прямая *MF* перпендикулярна прямой *SC*.

б) Найдите угол между плоскостью *MBF* и плоскостью *ABC*.

(Сб.7, 2020)

1. В правильной треугольной пирамиде *SABC* с вершиной *S*, все рёбра которой равны 6, точка *M −*середина ребра *BC*, точка *O* – центр основания пирамиды, точка *F* делит отрезок *SO* в отношении , считая от вершины пирамиды.

а) Докажите, что прямые *FM* и *BC* перпендикулярны.

б) Найдите угол между плоскостью *MCF* и плоскостью *ABC*.

(Сб.7, 2020)

1. В правильной треугольной пирамиде *SABC* с вершиной *S*, все рёбра которой равны 3, точка *M −*середина ребра *AC*, точка *O* – центр основания пирамиды, точка *F* делит отрезок *SO* в отношении , считая от вершины пирамиды.

а) Докажите, что плоскость *MSF* перпендикулярна ребру *AC*.

б) Найдите угол между плоскостью *MCF* и плоскостью *ABC*.

(Сб.5, 2018)

1. В правильной треугольной пирамиде *MABC* с основанием *ABC* стороны основания равны 6, а боковые рёбра равны 8. На ребре *AC* находится точка *D*, на ребре *AB* находится точка *E*, на ребре *AM* – точка *L*. Известно, что *CD* = *BE* = *AL* = 2.

а) Докажите, что отрезок *DE* содержит центр основания пирамиды.

б) Найдите угол между плоскостью основания и плоскостью, проходящей через точки *E*, *D* и *L*.

(Сб.6, 2019)

1. Основанием правильной треугольной пирамиды *MABC* служит треугольник *ABC* со стороной 12. Ребро *MA* перпендикулярно грани *MBC*. Через вершину пирамиды *M* и середины рёбер *AC* и *BC* проведена плоскость α.

а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью α является равносторонним треугольником.

б) Найдите угол между плоскостью α и плоскостью *AMB*.

(Сб.4, 2020, Сб.3, 2019)

1. Через сторону *AB* основания *ABC* правильной треугольной пирамиды *ABCD* проведена плоскость перпендикулярно ребру *DC*. Известно, что эта плоскость разбивает пирамиду на две треугольные пирамиды, объёмы которых относятся как , причём точка *D* содержится в большей из этих частей.

а) Докажите, что эта плоскость делит высоту *DH* пирамиды в отношении , считая от вершины *D*.

б) Найдите угол между секущей плоскостью и плоскостью *ABC*.

(Сб.12, 2019)

1. Дана правильная треугольная пирамида *DABC* с вершиной *D*. Точка *M* – середина ребра *AB*, *N −*основание перпендикуляра, опущенного из точки *M* на прямую *CD*.

а) Докажите, что прямая *MN* перпендикулярна прямой *AB*.

б) Найдите угол между боковыми гранями пирамиды, если угол между боковым ребром и плоскостью основания равен 60°.

(Сб.12, 2019)

1. В правильной треугольной пирамиде *SABC* сторона основания *AB* равна 6, а боковое ребро *SA* равно 4. Точки *M* и *N* − середины рёбер *SA* и *SB* соответственно. Плоскость α содержит прямую *MN* и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

а) Докажите, что плоскость α делит медиану *CE* в отношении , считая от точки *C*.

б) Найдите периметр многоугольника, являющегося сечением пирамиды *SABC* плоскостью α.

(Сб.8, 2020, Сб.6, Сб.9, 2019, Сб.11, 2016)

1. Плоскость α проходит через высоту *DD*1 правильного тетраэдра *ABCD* и ребро *AD*.

а) Докажите, что плоскость α перпендикулярна ребру *BC*.

б) Найдите площадь сечения тетраэдра плоскостью α, если рёбра тетраэдра равны *a*.

(Сб.12, 2019)

1. В основании правильной треугольной пирамиды *ABCD* лежит треугольник *ABC* со стороной, равной 6. Боковое ребро пирамиды равно 4. Через такую точку *T* ребра *AD*, что , параллельно прямым *AC* и *BD* проведена плоскость.

а) Докажите, что сечение пирамиды указанной плоскостью является прямоугольником.

б) Найдите площадь сечения.

(*ЕГЭ-2016, Т.Р.*, Сб.9, 2019)

1. В основании правильной треугольной пирамиды *ABCD* лежит треугольник *ABC* со стороной, равной 8. Боковое ребро пирамиды равно 5. Через такую точку *T* ребра *AD*, что , параллельно прямым *AC* и *BD* проведена плоскость.

а) Докажите, что сечение пирамиды указанной плоскостью является прямоугольником.

б) Найдите площадь сечения.

(*ЕГЭ-2016, Т.Р.*, Сб.9, 2019)

1. В правильной пирамиде *SABC* точки *M* и *N* − середины рёбер *AB* и *BC* соответственно. На боковом ребре *SA* отмечена точка *K*. Сечение пирамиды плоскостью *MNK* является четырёхугольником, диагонали которого пересекаются в точке *Q*.

а) Докажите, что точка *Q* лежит на высоте пирамиды.

б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью *MNK*, если *AB* = 12, *SA* = 15, *SK* = 6.

(***ЕГЭ-2018, основная волна***)

1. В правильной треугольной пирамиде *MABC* боковые рёбра равны 10, а сторона основания равна 12. Точки *G* и *F* делят стороны основания *AB* и *AC* соответственно так, что .

а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью *MGF* является равнобедренным треугольником.

б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью *MGF*.

(*ЕГЭ-2019, Т.Р.*, Сб.9, 2019)

1. В правильной треугольной пирамиде *MABC* боковые рёбра равны 50, а сторона основания равна 60. Точки *G* и *F* делят стороны основания *AB* и *AC* соответственно так, что .

а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью *MGF* является равнобедренным треугольником.

б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью *MGF*.

(*ЕГЭ-2019, Т.Р.*)

1. В правильном тетраэдре *ABCD* точки *K* и *M* − середины рёбер *AB* и *CD* соответственно. Плоскость α содержит прямую *KM* и параллельна прямой *AD*.

а) Докажите, что сечение тетраэдра плоскостью α − квадрат.

б) Найдите площадь сечения тетраэдра *ABCD* плоскостью α, если *AB* =.

(***ЕГЭ-2019, резервный вариант***) Гущин

1. В правильной треугольной пирамиде *SABC* сторона основания *AB* равна 24, а боковое ребро *SA* равно 19. Точки *M* и *N* − середины рёбер *SA* и *SB* соответственно. Плоскость α содержит прямую *MN* и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

а) Докажите, что плоскость α делит медиану *CE* в отношении , считая от точки *C*.

б) Найдите площадь многоугольника, являющегося сечением пирамиды *SABC* плоскостью α.

(***ЕГЭ-2015, резервный день основной волны***)

1. В правильной треугольной пирамиде *SABC* сторона основания *AB* равна 12, а боковое ребро *SA* равно 13. Точки *M* и *N* − середины рёбер *SA* и *SB* соответственно. Плоскость α содержит прямую *MN* и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

а) Докажите, что плоскость α делит медиану *CE* в отношении , считая от точки *C*.

б) Найдите площадь многоугольника, являющегося сечением пирамиды *SABC* плоскостью α.

(Сб.6, Сб.9, Сб.12, 2019)

1. В правильной треугольной пирамиде *SABC* сторона основания *AB* равна 6, а боковое ребро *SA* равно . Точки *M* и *N* − середины рёбер *SA* и *SB* соответственно. Плоскость α содержит прямую *MN* и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

а) Докажите, что плоскость α делит медиану *CE* в отношении , считая от точки *C*.

б) Найдите площадь многоугольника, являющегося сечением пирамиды *SABC* плоскостью α.

(Сб.11, 2016)

1. Плоскость α перпендикулярна основанию правильной треугольной пирамиды *SABC* и делит стороны *AB* и *BC* основания пополам.

а) Докажите, что плоскость α делит боковое ребро в отношении , считая от вершины *S*.

б) Найдите площадь сечения пирамиды этой плоскостью, если известно, что сторона основания равна 2, а высота пирамиды равна 4.

(Сб.12, 2019)

1. Точки *M* и *N* − середины рёбер *SA* и *SB* правильной треугольной пирамиды *SABC* с вершиной *S*. Через *M* и *N* проведена плоскость, перпендикулярная плоскости основания.

а) Докажите, что эта плоскость делит медиану *CE* в отношении , считая от точки *E*.

б) Найдите площадь сечения, если *AB* = 36, *SA* = 31.

(Сб.12, 2019)

1. В правильной треугольной пирамиде *SABC* сторона основания *AB* равна 9, а боковое ребро *SA* равно . На рёбрах *AB* и *SB* отмечены точки *M* и *K* соответственно, причём *AM* = 8, *SK* : *KB* = 7 : 3. Плоскость α перпендикулярна плоскости *ABC* и содержит точки *M* и *K*.

а) Докажите, что плоскость α содержит точку *C*.

б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью α.

(***ЕГЭ-2020, основная волна***) Гущин

1. Дана правильная треугольная пирамида *SABC* в которой *AB* = 6, точка *M* лежит на ребре *A* так, что *AM* = 5. Точка *K* делит сторону *SB* так, что *SK* : *KB* = 7 : 3. Ребро *SA* =. Точки *M* и *K* принадлежат плоскости α, которая перпендикулярна плоскости *ABC*.

а) Докажите, что точка *С* принадлежит плоскости α.

б) Найдите площадь сечения α.

(***ЕГЭ-2020, основная волна***) Гущин

1. Дана правильная треугольная пирамида *SABC* с основанием *ABC*. Точка *E* принадлежит ребру *AS*, причём . Плоскость, параллельная ребру *SC* и высоте пирамиды *SO*, пересекает ребро *AB* в точке *F*.

а) Докажите, что .

б) Найдите площадь сечения пирамиды этой плоскостью, если *AB* = 6, *SA* =.

(Сб.9, 2018)

1. Дана правильная треугольная пирамида *SABC* с основанием *ABC*. Точка *E* принадлежит ребру *AS*, причём . Плоскость, параллельная ребру *SC* и высоте пирамиды *SO*, пересекает ребро *AB* в точке *F*.

а) Докажите, что .

б) Найдите площадь сечения пирамиды этой плоскостью, если *AB* = 12, *SA* = 7.

(Сб.9, 2018)

1. В правильной треугольной пирамиде *SABC* с основанием *ABC* боковое ребро *SA* = 8. Точки *M* и *N –* середины рёбер *AB* и *CS* соответственно, *MN* = 5.

а) Докажите, что проекции отрезков *SA* и *MN* на плоскость *ABC* равны.

б) Найдите объем пирамиды *SABC*.

(***ЕГЭ-2020, резервный вариант***) Гущин

1. Сторона основания *ABC* правильной треугольной пирамиды *ABCD* равна 6, а площадь сечения, проходящего через ребро *AB* и середину бокового ребра *CD*, равна .

а) Докажите, что плоскость сечения образует с плоскостью основания угол 45°.

б) Найдите объём пирамиды *ABCD*.

(Сб.12, 2019)

1. В правильной пирамиде *SABC* точки *M* и *N* − середины рёбер *AB* и *BC* соответственно. На боковом ребре *SA* отмечена точка *K*. Сечение пирамиды плоскостью *MNK* является четырёхугольником, диагонали которого пересекаются в точке *Q*.

а) Докажите, что точка *Q* лежит на высоте пирамиды.

б) Найдите объём пирамиды *QMNB*, если , *SA* = 10, *SK* = 2.

(***ЕГЭ-2018, основная волна***)

1. В правильной треугольной пирамиде *SABC* сторона основания *AB* равна 30, а боковое ребро *SA* равно 28. Точки *M* и *N* − середины рёбер *SA* и *SB* соответственно. Плоскость α содержит прямую *MN* и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

а) Докажите, что плоскость α делит медиану *CE* в отношении , считая от точки *C*.

б) Найдите объём пирамиды, вершиной которой является точка *C*, а основанием – сечение пирамиды *SABC* плоскостью α.

(***ЕГЭ-2015, основная волна***, Сб.11, 2016)

1. В правильной треугольной пирамиде *SABC* сторона основания *AB* равна 12, а боковое ребро *SA* равно 8. Точки *M* и *N* − середины рёбер *SA* и *SB* соответственно. Плоскость α содержит прямую *MN* и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

а) Докажите, что плоскость α делит медиану *CE* в отношении , считая от точки *C*.

б) Найдите объём пирамиды, вершиной которой является точка *C*, а основанием – сечение пирамиды *SABC* плоскостью α.

(Сб.8, 2020, Сб.6, Сб.9, Сб.12, 2019, Сб.5, 2018, Сб.11, 2016)

1. Высота *SH* правильной треугольной пирамиды *SABC* относится к высоте основания *ABC* как . Плоскость α проходит через ребро *AB* и делит пополам двугранный угол пирамиды при этом ребре.

а) Докажите, что плоскость α делит высоту пирамиды в отношении , считая от точки *H*.

б) Найдите объём меньшей из частей, на которые пирамида разбивается плоскостью α, если сторона основания пирамиды равна 6.

(Сб.12, 2019)

1. Точка *M* − середина ребра *BD* правильного тетраэдра *ABCD*. Плоскость, проходящая через точку *M* перпендикулярно ребру *AD*, пересекает это ребро в точке *K*, а ребро *CD* – в точке *N*.

а) Докажите, что *N* – середина ребра *CD*.

б) Найдите объём тетраэдра *ABCD*, если объём пирамиды *DKMN* равен *V*.

(Сб.12, 2019)

1. Точка *P* − середина медианы *BK* основания *ABC* правильной треугольной пирамиды *ABCD*.

а) Докажите, что плоскость α, проходящая через точку *B* и середины рёбер *AD* и *CD*, делит отрезок *DP* в отношении , считая от вершины *D*.

б) Найдите расстояние от вершины *C* до плоскости α, если объём пирамиды *ABCD* равен 16, а площадь её сечения плоскостью α равна 3.

(Сб.12, 2019)

1. Точка *P* лежит на ребре *AD* правильного тетраэдра *ABCD*, причём . Плоскость, проходящая через точку *P* перпендикулярно ребру *CD*, пересекает это ребро в точке *M*, а ребро *BD* – в точке *Q*.

а) Докажите, что плоскость *PMQ* делит высоту пирамиды пополам.

б) Найдите объём треугольной пирамиды *QABC*, если объём пирамиды *DPMQ* равен *V*.

(Сб.12, 2019)

***10. Правильная четырёхугольная пирамида***

1. Дана правильная четырёхугольная пирамида *MABCD*, рёбра основания которой равны . Точка *L* – середина ребра *MB*. Тангенс угла между прямыми *DM* и *AL* равен .

а) Пусть *O* – центр основания пирамиды. Докажите, что прямые *AO* и *LO* перпендикулярны.

б) Найдите высоту данной пирамиды.

(Сб.3, Сб.4, Сб.7, 2020)

1. Все рёбра правильной четырёхугольной пирамиды *SABCD* с вершиной *S* равны 6. Основание высоты *SO* этой пирамиды является серединой отрезка *SS*1, *M* – середина ребра *AS*, точка *L* лежит на ребре *BC* так, что.

а) Докажите, что сечение пирамиды *SABCD* плоскостью *S*1*LM* – равнобокая трапеция.

б) Вычислите длину средней линии этой трапеции.

(*ЕГЭ-2016, Т.Р.*, Сб.9, 2018)

1. Все рёбра правильной четырёхугольной пирамиды *SABCD* с вершиной *S* равны 12. Основание высоты *SO* этой пирамиды является серединой отрезка *SS*1, *M* – середина ребра *AS*, точка *L* лежит на ребре *BC* так, что .

а) Докажите, что сечение пирамиды *SABCD* плоскостью *S*1*LM* – равнобокая трапеция.

б) Вычислите длину средней линии этой трапеции.

(*ЕГЭ-2016, Т.Р.*, Сб.9 2018)

1. В правильной четырёхугольной пирамиде *SABCD* все рёбра равны 5. На рёбрах *SA*, *AB*, *BC* взяты точки *P*, *Q*, *R* соответственно так, что *PA* = *AQ* = *RC* =2.

а) Докажите, что плоскость *PQR* перпендикулярна ребру *SD*.

б) Найдите расстояние от вершины *D* до плоскости *PQR*.

(***ЕГЭ-2017, ЕГЭ-2015***) Гущин

1. В правильной четырёхугольной пирамиде *SABCD* сторона *AB* основания равна 16, а высота пирамиды равна 4. На рёбрах *AB*, *CD* и *AS* отмечены точки *M*, *N* и *K* соответственно, причём *AM* = *DN* = 4 и *AK* = 3.

а) Докажите, что плоскости *MNK* и *SBC* параллельны.

б) Найдите расстояние от точки *M* до плоскости *SBC*.

(***ЕГЭ-2021, Демо, ЕГЭ-2016, основная волна Юг***) Гущин

1. В правильной четырёхугольной пирамиде *SABCD* сторона *AB* основания равна 16, а высота пирамиды равна 4. На рёбрах *AB*, *CD* и *AS* отмечены точки *M*, *N* и *K* соответственно, причём *AM* = *DN* = 4 и *AK* = 3.

а) Докажите, что плоскости *MNK* и *SBC* параллельны.

б) Найдите расстояние от точки *K* до плоскости *SBC*.

(Сб.12, 2019)

1. Дана правильная четырёхугольная пирамида *SABCD* со стороной основания, равной 3, высота пирамиды равна . На рёбрах *AB*, *CD* и *AS* отмечены точки *M*, *N* и *K* соответственно, причём *AM* = *DN* = *AK* = 1.

а) Докажите, что плоскость *MNK* параллельна плоскости *SBC*.

б) Найдите расстояние от точки *K* до плоскости *SBC*.

(Сб.8, 2020)

1. Дана правильная четырёхугольная пирамида *SABCD* со стороной основания, равной 12, высота пирамиды равна 3. На рёбрах *AB*, *CD* и *AS* отмечены точки *M*, *N* и *K* соответственно, причём *AM* = *DN* = 3 и *AK* =.

а) Докажите, что плоскость *MNK* параллельна плоскости *SBC*.

б) Найдите расстояние от точки *K* до плоскости *SBC*.

(Сб.8, 2020)

1. Противоположные боковые грани правильной четырёхугольной пирамиды *MABCD* с основанием *ABCD* попарно перпендикулярны. Через середины *K* и *L* рёбер *AB* и *AD* соответственно и точку *M* проведена плоскость α.

а) Докажите, что сечение пирамиды *MABCD* плоскостью α является равносторонним треугольником.

б) Найдите расстояние от точки *A* до плоскости α, если *AB* =.

(Сб.1, Сб.3, Сб.4, 2020, Сб.2, 2019)

1. Противоположные боковые грани правильной четырёхугольной пирамиды *MABCD* с основанием *ABCD* попарно перпендикулярны. Через середины *K* и *L* рёбер *AB* и *AD* соответственно и точку *M* проведена плоскость α.

а) Докажите, что сечение пирамиды *MABCD* плоскостью α является равносторонним треугольником.

б) Найдите расстояние от точки *D* до плоскости α, если *AB* = 9.

(Сб.2, Сб.3, Сб.4, 2020)

1. В правильной четырёхугольной пирамиде *SABCD* сторона основания *AB* равна 6, а боковое ребро *SA* равно 7. На рёбрах *CD* и *SC* взяты точки *N* и *K* соответственно, причем . Плоскость α содержит прямую *KN* и параллельна прямой *SA*.

а) Докажите, что плоскость *α* параллельна прямой *BC*.

б) Найдите расстояние от точки *C* до плоскости *α*.

(Сб.11, 2020)

1. В правильной четырёхугольной пирамиде *SABCD* сторона основания *AB* равна 7, а боковое ребро *SA* равно 14. На рёбрах *CD* и *SC* взяты точки *N* и *K* соответственно, причем . Плоскость α содержит прямую *KN* и параллельна прямой *SA*.

а) Докажите, что плоскость *α* параллельна прямой *BC*.

б) Найдите расстояние от точки *B* до плоскости *α*.

(***ЕГЭ-2019, основная волна***)

1. Точка *K* лежит на стороне *AB* основания *ABCD* правильной четырёхугольной пирамиды *SABCD*, все рёбра которой равны. Плоскость α проходит через точку *K* параллельно плоскости *ASD*. Сечение пирамиды плоскостью α – четырёхугольник, в который можно вписать окружность.

а) Докажите, что *BK* = 2*AK*.

б) Найдите расстояние от вершины *S* до плоскости α, если все рёбра пирамиды равны 1.

(Сб.12, 2019)

1. В правильной четырёхугольной пирамиде *SABCD* боковое ребро *SA* равно , а высота *SH* равна 3. Точки *M* и *N* – середины рёбер *CD* и *AB* соответственно, а *NT* – высота пирамиды с вершиной *N* и основанием *SCD*.

а) Докажите, что точка *T* является серединой *SM*.

б) Найдите расстояние между *NT* и *SC*.

(***ЕГЭ-2016, основная волна***)

1. В правильной четырёхугольной пирамиде *SABCD* боковое ребро *SA* равно , а высота *SH* равна . Точки *M* и *N* – середины рёбер *CD* и *AB* соответственно, а *NT* – высота пирамиды с вершиной *N* и основанием *SCD*.

а) Докажите, что точка *T* является серединой *SM*.

б) Найдите расстояние между *NT* и *SC*.

(***ЕГЭ-2016, основная волна***)

1. Боковая грань правильной четырёхугольной пирамиды *SABCD* с вершиной *S* образует с плоскостью основания угол 45°. Точка *M* – середина бокового ребра *SD*.

а) Докажите, что противоположные боковые грани пирамиды перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между прямыми *AB* и *CM*, если сторона основания пирамиды равна .

(Сб.12. 2019)

1. Боковая грань правильной четырёхугольной пирамиды *SABCD* с вершиной *S* образует с плоскостью основания угол 60°. Точка *M* – середина бокового ребра *SD*.

а) Докажите, что плоскости *AMB* и *CSD* перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между прямыми *AB* и *CM*, если сторона основания пирамиды равна .

(Сб.12. 2019)

1. В правильной четырёхугольной пирамиде *SABCD* сторона основания *AB* равна 4, а боковое ребро *SA* = 8. На рёбрах *CD* и *SC* отмечены точки *N* и *K* соответственно, причём . Плоскость α содержит прямую *KN* и параллельна прямой *BC*.

а) Докажите, что плоскость α делит ребро *AB* в отношении , считая от вершины *A*.

б) Найдите расстояние между прямыми *SA* и *KN*.

(***ЕГЭ-2019, основная волна***) Гущин

1. В правильной четырёхугольной пирамиде *SABCD* сторона основания *AB* равна 8, а боковое ребро *SA* равно 10. На рёбрах *CD* и *SC* отмечены точки *N* и *K* соответственно, причём . Плоскость α содержит прямую *KN* и параллельна прямой *BC*.

а) Докажите, что плоскость α делит ребро *SB* в отношении , считая от вершины *S*.

б) Найдите расстояние между прямыми *SA* и *KN*.

(***ЕГЭ-2019, основная волна***) Гущин

1. Дана правильная четырёхугольная пирамида *SABCD* с вершиной *S*. Все рёбра пирамиды равны. Точка *M* – середина ребра *BC*.

а) Докажите, что ортогональная проекция середины ребра *AB* на плоскость *CSD* делит медиану *SN* этой грани в отношении , считая от вершины *S*.

б) Найдите угол между прямой *SM* и плоскостью *CSD*.

(Сб.12. 2019)

1. Противоположные боковые грани правильной четырёхугольной пирамиды *MABCD* с основанием *ABCD* попарно перпендикулярны. Через середины *K* и *L* рёбер *AB* и *AD* соответственно и точку *M* проведена плоскость α.

а) Докажите, что сечение пирамиды *MABCD* плоскостью α является равносторонним треугольником.

б) Найдите угол между плоскостью α и ребром *MB*.

(Сб.1, Сб.3, Сб.4, 2020, Сб.2, 2019)

1. В основании правильной четырёхугольной пирамиды *MABCD* лежит квадрат *ABCD*. Противоположные боковые грани пирамиды попарно перпендикулярны. Через середины рёбер *MA* и *MB* проведена плоскость α, параллельная ребру *MC*.

а) Докажите, что плоскость α параллельна ребру *MD*.

б) Найдите угол между плоскостью α и прямой *AC*.

(*ЕГЭ-2019, Д.Р.*)

1. В основании правильной четырёхугольной пирамиды *MABCD* лежит квадрат *ABCD*. Противоположные боковые грани пирамиды попарно перпендикулярны. Через середины рёбер *MA* и *MB* проведена плоскость α, параллельная ребру *MD*.

а) Докажите, что плоскость α параллельна ребру *MC*.

б) Найдите угол между плоскостью α и прямой *BD*.

(*ЕГЭ-2019, Д.Р.*)

1. В правильной четырёхугольной пирамиде *SABCD* сторона основания *AB* равна 4, а боковое ребро *SA* равно 7. На рёбрах *CD* и *SC* отмечены точки *N* и *K* соответственно, причём . Плоскость α содержит прямую *KN* и параллельна прямой *BC*.

а) Докажите, что плоскость α параллельна прямой *SA*.

б) Найдите угол между плоскостями α и *SBC*.

(***ЕГЭ-2020, досрочная волна***) Гущин

1. В правильной четырёхугольной пирамиде *SABCD* сторона основания *AB* равна 6, а боковое ребро *SA* равно 7. На рёбрах *CD* и *SC* отмечены точки *N* и *K* соответственно, причём . Плоскость α содержит прямую *KN* и параллельна прямой *BC*.

а) Докажите, что плоскость α параллельна прямой *SA*.

б) Найдите угол между плоскостями α и *SBC*.

(***ЕГЭ-2020, досрочная волна***) Гущин

1. Дана правильная четырёхугольная пирамида *SABCD* с вершиной *S*. Точка *O* − центр основания, *K* − основание перпендикуляра, опущенного из точки *O* на прямую *SC*.

а) Докажите, что прямая *OK* перпендикулярна прямой *BD*.

б) Найдите двугранный угол при боковом ребре пирамиды, если угол между боковым ребром и плоскостью основания равен 60°.

(Сб.12, 2019)

1. На ребре *AB* правильной четырёхугольной пирамиды *SABCD* с основанием *ABCD* отмечена точка *Q*, причём *.* Точка *P* – середина ребра *AS.*

а) Докажите, что плоскость *DPQ* перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

б) Найдите площадь сечения *DPQ,* если площадь сечения *DSB* равна 6.

(***ЕГЭ-2018, резервный день основной волны***, Сб.12, 2019) Гущин

1. На ребре *AB* правильной четырёхугольной пирамиды *SABCD* с основанием *ABCD* отмечена точка *Q*, причём *.* Точка *P* – середина ребра *AS.*

а) Докажите, что плоскость *DPQ* перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

б) Найдите площадь сечения *DPQ,* если площадь сечения *DSB* равна .

(***ЕГЭ-2018, резервный день основной волны***) Гущин

1. Дана правильная четырёхугольная пирамида *MABCD*, все рёбра которой равны 12. Точка *N −*середина бокового ребра *MA*, точка *K* делит боковое ребро *MB* в отношении , считая от вершины *M*.

а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точки *N* и *K* параллельно прямой *AD*, является равнобедренной трапецией.

б) Найдите площадь этого сечения.

(*ЕГЭ-2018, Т.Р.*)

1. Дана правильная четырёхугольная пирамида *MABCD*, все рёбра которой равны 6. Точка *N* – середина бокового ребра *MA*, точка *K* делит боковое ребро *MB* в отношении , считая от вершины *M*.

а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точки *N* и *K* параллельно прямой *AD*, является равнобедренной трапецией.

б) Найдите площадь этого сечения.

(*ЕГЭ-2018, Т.Р.*, Сб.7, 2020)

1. В основании правильной четырёхугольной пирамиды *MABCD* лежит квадрат *ABCD* со стороной 6. Противоположные боковые рёбра пирамиды попарно перпендикулярны. Через середины рёбер *MA* и *MB* проведена плоскость α, параллельная ребру *MC*.

а) Докажите, что сечение плоскостью α пирамиды *MABC* является параллелограммом.

б) Найдите площадь сечения пирамиды *MABC* плоскостью α.

(*ЕГЭ-2019, Т.Р.*)

1. В основании правильной четырёхугольной пирамиды *MABCD* лежит квадрат *ABCD* со стороной 10. Противоположные боковые рёбра пирамиды попарно перпендикулярны. Через середины рёбер *MA* и *MB* проведена плоскость α, параллельная ребру *MC*.

а) Докажите, что сечение плоскостью α пирамиды *MABC* является параллелограммом.

б) Найдите площадь сечения пирамиды *MABC* плоскостью α.

(*ЕГЭ-2019, Т.Р.*)

1. В правильной четырёхугольной пирамиде *MABCD* известна сторона квадрата *ABCD*, лежащего в основании, – она равна 6. Противоположные боковые грани пирамиды попарно перпендикулярны. Через середины рёбер *MA* и *MB* проведена плоскость α, параллельная ребру *MC*.

а) Докажите, что сечение треугольной пирамиды *MABC* плоскостью α является параллелограммом.

б) Найдите площадь сечения пирамиды *MABC* плоскостью α.

(*ЕГЭ-2020, Т.Р.*)

1. В правильной четырёхугольной пирамиде *MABCD* известна сторона квадрата *ABCD*, лежащего в основании, – она равна 8. Противоположные боковые грани пирамиды попарно перпендикулярны. Через середины рёбер *MA* и *MB* проведена плоскость α, параллельная ребру *MC*.

а) Докажите, что сечение треугольной пирамиды *MABC* плоскостью α является параллелограммом.

б) Найдите площадь сечения пирамиды *MABC* плоскостью α.

(*ЕГЭ-2020, Т.Р.*)

1. В основании правильной пирамиды *PABCD* лежит квадрат *ABCD* со стороной 6. Сечение пирамиды проходит через вершину *B* и середину ребра *PD* перпендикулярно этому ребру.

а) Докажите, что угол наклона бокового ребра пирамиды к её основанию равен 60°.

б) Найдите площадь сечения пирамиды.

(*ЕГЭ-2018, Т.Р.,* *ЕГЭ-2015, Д.Р. 10кл.*)

1. В основании правильной пирамиды *PABCD* лежит квадрат *ABCD* со стороной 9. Сечение пирамиды проходит через вершину *B* и середину ребра *PD* перпендикулярно этому ребру.

а) Докажите, что угол наклона бокового ребра пирамиды к её основанию равен 60°.

б) Найдите площадь сечения пирамиды.

(*ЕГЭ-2018, Т.Р.,* *ЕГЭ-2015, Д.Р. 10кл.*)

1. Через вершину *S* правильной четырёхугольной пирамиды *SABCD* и середины сторон *AD* и *CD* основания проведена плоскость α; *K* – точка пересечения этой плоскости с прямой *BC*.

а) Докажите, что отрезок *CK* вдвое меньше стороны основания.

б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью α, если сторона основания пирамиды равна *a*, а боковое ребро равно 2*a*.

(Сб.12. 2019)

1. Дана правильная четырёхугольная пирамида *PABCD* с вершиной в точке *P*. Через точку *C* и середину ребра *AB* перпендикулярно к основанию пирамиды проведена плоскость α.

а) Докажите, что плоскость α делит ребро *BP* в отношении , считая от точки *B*.

б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью α, если известно, что *PA* = 10, *AC* = 16.

(Сб.12, 2019)

1. В правильной четырёхугольной пирамиде *MABCD* с вершиной *M* боковое ребро равно 10. Точка *L* – середина ребра *MC*. Тангенс угла между прямыми *BL* и *AM* равен .

а) Пусть *O* − центр основания пирамиды. Докажите, что прямые *AM* и *OL* параллельны.

б) Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

(Сб.5, 2018)

1. В правильной четырёхугольной пирамиде *SABCD* с вершиной *S* сторона основания равна 6. Точка *L* – середина ребра *SC*. Тангенс угла между прямыми *BL* и *SA* равен 0,5.

а) Пусть *O* – центр основания пирамиды. Докажите, что прямые *AS* и *OL* параллельны.

б) Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

(Сб.5, 2018)

1. В правильной четырёхугольной пирамиде *SABCD* с вершиной *S* сторона основания равна 8. Точка *L* – середина ребра *SC*. Тангенс угла между прямыми *BL* и *SA* равен .

а) Пусть *O* – центр основания пирамиды. Докажите, что прямые *BO* и *LO* перпендикулярны.

б) Найдите площадь поверхности пирамиды.

(Сб.2, Сб.3, Сб.4, Сб.7, 2020)

1. Площадь основания *ABCD* правильной четырёхугольной пирамиды *SABCD* равна 64, а площадь сечения пирамиды плоскостью *SAC* равна .

а) Докажите, что угол между плоскостью основания пирамиды и боковым ребром равен 60°.

б) Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

(Сб.3, Сб.4, 2020)

1. Площадь основания правильной четырёхугольной пирамиды *SABCD* равна 64.

а) Докажите, что плоскость, проходящая через вершину *S* и середины рёбер *BC* и *AD*, содержит высоту пирамиды.

б) Найдите площадь боковой поверхности этой пирамиды, если площадь сечения пирамиды плоскостью *SAC* равна 64.

(Сб.7, 2020)

1. Площадь боковой поверхности правильной четырёхугольной пирамиды *SABCD* с основанием *ABCD* равна 108, а площадь полной поверхности этой пирамиды равна 144.

а) Докажите, что угол между плоскостью *SAC* и плоскостью, проходящей через вершину *S* этой пирамиды, середину стороны *AB* и центр основания, равен 45°.

б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью *SAC*.

(Сб.2, Сб.3, Сб.4, Сб.7, 2020)

1. *SABCD* – правильная четырёхугольная пирамида с основанием *ABCD*. Из точки *B* опущен перпендикуляр *BH* на плоскость *SAD*.

а) Докажите, что ∠*AHC* = 90°.

б) Найдите объём пирамиды, если *HA* = 3 и *HC* = 5.

(Сб.2, 2018)

1. *SABCD* – правильная четырёхугольная пирамида с основанием *ABCD*. Из точки *B* опущен перпендикуляр *BH* на плоскость *SAD*.

а) Докажите, что ∠*AHC* = 90°.

б) Найдите объём пирамиды, если *HA* = 2 и *HC* = 4.

(Сб.2, 2018)

1. В правильной четырёхугольной пирамиде *SABCD* сторона основания *AB* равна 8, а боковое ребро *SA* равно 7. На рёбрах *AB* и *SB* отмечены точки *M* и *K* соответственно, причём *AM* = 2, *SK* = 1.

а) Докажите, что плоскость *CKM* перпендикулярна плоскости *ABC*.

б) Найдите объём пирамиды *BCKM*.

(***ЕГЭ-2020, основная волна***)

1. В правильной четырёхугольной пирамиде *SABCD* сторона основания *AB* = 4, а боковое ребро *SA* = 7. На рёбрах *AB* и *SB* отмечены точки *M* и *K* соответственно, причём *AM* = *SK* = 1.

а) Докажите, что плоскость *CKM* перпендикулярна плоскости *ABC*.

б) Найдите объём пирамиды *BCKM*.

(***ЕГЭ-2020, основная волна***) Гущин

1. Противоположные боковые грани правильной четырёхугольной пирамиды *MABCD* с основанием *ABCD* попарно перпендикулярны. Через середины *K* и *L* рёбер *AB* и *AD* соответственно и точку *M* проведена плоскость α.

а) Докажите, что сечение пирамиды *MABCD* плоскостью α является равносторонним треугольником.

б) Найдите объём пирамиды *MCKL*, если *AB* = 4.

(Сб.1, Сб.3, Сб.4, 2020, Сб.2, 2019)

1. Противоположные боковые грани правильной четырёхугольной пирамиды *MABCD* с основанием *ABCD* попарно перпендикулярны. Через середины *K* и *L* рёбер *AB* и *AD* соответственно и точку *M* проведена плоскость α.

а) Докажите, что сечение пирамиды *MABCD* плоскостью α является равносторонним треугольником.

б) Найдите объём пирамиды *MBKL*, если *AB* = 6.

(Сб.1, Сб.2, Сб.3, Сб.4, 2020)

1. Дана правильная четырёхугольная пирамида *SABCD* с вершиной *S*. Апофема пирамиды вдвое больше стороны основания. Плоскость α проходит через ребро *AB* и делит пополам двугранный угол пирамиды при этом ребре.

а) Докажите, что плоскость α делит высоту пирамиды в отношении , считая от вершины *S*.

б) Найдите объём большей из частей, на которые пирамида разбивается плоскостью α, если сторона основания пирамиды равна .

(Сб.12, 2019)

1. На ребре *SD* правильной четырёхугольной пирамиды *SABCD* с основанием *ABCD* отмечена точка *M*, причём . Точки *P* и *Q* – середины рёбер *BC* и *AD* соответственно

а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью *MPQ* является равнобедренной трапецией.

б) Найдите отношение объёмов многогранников, на которые плоскость *MPQ* разбивает пирамиду.

(***ЕГЭ-2017, основная волна***, Сб.12, 2019)

1. На ребре *SA* правильной четырёхугольной пирамиды *SABCD* с основанием *ABCD* отмечена точка *M*, причём . Точки *P* и *Q* – середины рёбер *BC* и *AD* соответственно

а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью *MPQ* является равнобедренной трапецией.

б) Найдите отношение объёмов многогранников, на которые плоскость *MPQ* разбивает пирамиду.

(Сб.6, 2019)

***11. Правильная шестиугольная пирамида***

1. Дана правильная шестиугольная пирамида *SABCDEF* с вершиной *S*.

а) Докажите, что плоскость α, проходящая через ребро *AB* и середину ребра *SE*, делит ребро *SC* в отношении , считая от вершины *S*.

б) Найдите расстояние от точки *S* до плоскости α, если сторона основания пирамиды равна , а угол между боковой гранью и плоскостью основания пирамиды равен 60°.

(Сб.12, 2019)

1. В правильной шестиугольной пирамиде *SABCDEF* боковые рёбра равны 2, а стороны основания –  1.

а) Докажите, что плоскость, проходящая через вершину *S* и середины рёбер *AF* и *CD*, перпендикулярна плоскости основания.

б) Найдите косинус угла между прямой *AC* и плоскостью *SAF*.

(Сб.7, 2020)

1. Дана правильная шестиугольная пирамида *SABCDEF* с вершиной *S*. Диагонали *AD* и *CE* основания пересекаются в точке *P*, *Q* – основание перпендикуляра, опущенного из точки *P* на прямую *SD*.

а) Докажите, что прямая *PQ* перпендикулярна прямой *CE*.

б) Найдите двугранный угол при боковом ребре пирамиды, если угол между боковым ребром и плоскостью основания равен 60°.

(Сб.12, 2019)

1. В правильной шестиугольной пирамиде *SABCDEF* с вершиной *S* боковое ребро вдвое больше стороны основания.

а) Докажите, что плоскость, проходящая через середины рёбер *SA* и *SE* и вершину *C*, делит ребро *SB* в отношении , считая от вершины *B*.

б) Найдите отношение, в котором плоскость, проходящая через середины рёбер *SA* и *SE* и вершину *C*, делит ребро *SF*, считая от вершины *S*.

(Сб.1, Сб.2, Сб.3, Сб.4, 2020)

1. В правильной шестиугольной пирамиде *SABCDEF* с вершиной *S* боковое ребро вдвое больше стороны основания.

а) Докажите, что плоскость, проходящая через середины рёбер *SA* и *SD* и вершину *C*, делит апофему грани *ASB* в отношении , считая от вершины *S*.

б) Найдите отношение, в котором плоскость, проходящая через середины рёбер *SA* и *SD* и вершину *C*, делит ребро *SF*, считая от вершины *S*.

(Сб.3, Сб.4, 2019)

1. В правильной шестиугольной пирамиде *SABCDEF* с вершиной *S* боковое ребро вдвое больше стороны основания.

а) Докажите, что плоскость, проходящая через середины рёбер *SA* и *SD* и вершину *C*, делит апофему грани *ASB* в отношении , считая от вершины *S*.

б) Найдите отношение, в котором плоскость, проходящая через середины рёбер *SA* и *SD* и вершину *C*, делит ребро *SF*, считая от вершины *S*.

(Сб.3, Сб.4, 2020)

1. Через вершину *S* и диагональ *BD* правильной шестиугольной пирамиды *SABCDEF* проведена плоскость α.

а) Докажите, что расстояние от центра основания до этой плоскости в три раза меньше расстояния до этой плоскости от точки *F*.

б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью α, если сторона основания равна , а угол между боковой гранью и плоскостью основания равен 60°.

(Сб.12, 2019)

1. Сторона основания *ABCDEF* правильной шестиугольной пирамиды *SABCDEF* равна 4, а площадь сечения, проходящего через прямую *CF* и середину бокового ребра *SD*, равна .

а) Докажите, что плоскость сечения образует с плоскостью основания угол 60°.

б) Найдите объём пирамиды *SABCDEF*.

(Сб.12, 2019)

1. В правильной шестиугольной пирамиде *SABCDEF* сторона основания *AB* равна 5, а боковое ребро *SA* равно 8. На рёбрах *BC* и *SC* отмечены точки *M* и *K* соответственно, причем *BM* = 2, *SK* = 5.

а) Докажите, что плоскость *MKD* перпендикулярна плоскости *ABC*.

б) Найдите объем пирамиды *CDKM.*

(***ЕГЭ-2020, основная волна***)

1. В правильной шестиугольной пирамиде *SABCDEF* сторона основания *AB* равна 7, а боковое ребро *SA* равно 10. На рёбрах *BC* и *SC* отмечены точки *M* и *K* соответственно, причем *BM* = 4, *SK* = 7.

а) Докажите, что плоскость *MKD* перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

б) Найдите объем пирамиды *CDKM.*

(***ЕГЭ-2020, основная волна***) Гущин

1. В правильной шестиугольной пирамиде *SABCDEF* боковое ребро *SA* = 14, а сторона *AB* = 8. Точка *М –* середина стороны *AB.* Плоскость α проходит через точки *M* и *D* и перпендикулярна плоскости *ABC*. Прямая *SC* пересекает плоскость α в точке *K*.

a) Докажите, что *MK* = *KD*.

б) Найдите объем пирамиды *MCDK*.

(***ЕГЭ-2020, основная волна***) Гущин

1. В правильной шестиугольной пирамиде *SABCDEF* сторона *AB* основания *ABCDEF* равна , а боковая грань образует с плоскостью основания угол 60°. Плоскость α проходит через прямую *CF* и перпендикулярна плоскости боковой грани *DSE*.

а) Докажите, что плоскость α делит боковое ребро *SD* в отношении , считая от точки *S*.

б) Найдите объём пирамиды, вершиной которой является точка *S*, а основанием – сечение пирамиды *SABCDEF* плоскостью α.

(Сб.12, 2019)

***12. Пирамида***

1. Боковые рёбра пирамиды *SABC* с вершиной *S* попарно перпендикулярны.

а) Докажите, что высота *SH* пирамиды проходит через точку пересечения высот основания *ABC*.

б) Найдите *SH*, если боковые рёбра равны 2, 2 и .

(Сб.12, 2019)

1. Боковые рёбра пирамиды *SABC* с вершиной *S* попарно перпендикулярны, *M –* произвольная точка на ребре *BC*.

а) Докажите, что плоскости *AMS* и *BSC* перпендикулярны.

б) Высота *SH* пирамиды равна 12. Прямая *AH* пересекает ребро *BC* в точке *K*. Найдите расстояние от точки *K* до прямой *AS*, если *AS* = 20.

(Сб.12, 2019)

1. В пирамиде *ABCD* рёбра *DA*, *DB* и *DC* попарно перпендикулярны, а *AB* = *BC* = *AC* =.

а) Докажите, что эта пирамида правильная.

б) На рёбрах *DA* и *DC* отмечены точки *M* и *N* соответственно, причём . Найдите площадь сечения *MNB*.

(*ЕГЭ-2018, П.Р.*)

1. В пирамиде *ABCD* рёбра *DA*, *DB* и *DC* попарно перпендикулярны, а *AB* = *BC* = *AC* =.

а) Докажите, что эта пирамида правильная.

б) На рёбрах *DA* и *DC* отмечены точки *M* и *N* соответственно, причём . Найдите площадь сечения *MNB*.

(*ЕГЭ-2018, П.Р.*)

1. В пирамиде *ABCD* рёбра *DA*, *DB* и *DC* попарно перпендикулярны, а *AB* = *BC* = *AC* = 14.

а) Докажите, что эта пирамида правильная.

б) На рёбрах *DA* и *DC* отмечены точки *M* и *N* соответственно, причём . Найдите площадь сечения *MNB*.

(Сб.6, 2019)

1. Основание пирамиды *DABC* – прямоугольный треугольник *ABC* с прямым углом *C*. Высота пирамиды проходит через середину ребра *AC*, а боковая грань *ACD* – равносторонний треугольник.

а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью, проходящей через ребро *BC* и произвольную точку *M* ребра *AD*, – прямоугольный треугольник.

б) Найдите расстояние от вершины *D* до этой плоскости, если *M* – середина ребра *AD*, а высота пирамиды равна 6.

(Сб.12, 2019)

1. Основание пирамиды *DABC* – прямоугольный треугольник *ABC* с гипотенузой *AB*. Все боковые рёбра образуют равные углы с плоскостью основания.

а) Докажите, что высота пирамиды проходит через середину отрезка *AB*.

б) Известно, что *AB* = 15, *AC* = 6. Найдите расстояние между прямыми *DM* и *CH*, где *DM* – высота пирамиды *DABC*, *CH* – высота треугольника *ABC*.

(Сб.12, 2019)

1. В основании пирамиды *DABC* лежит прямоугольный треугольник *ABC* с прямым углом при вершине *C*. Высота пирамиды проходит через точку *B*.

а) Докажите, что отрезок, соединяющий середины рёбер *BC* и *AD*, равен отрезку, соединяющему середины рёбер *AB* и *CD*.

б) Найдите угол между прямой *BD* и прямой, проходящей через середины рёбер *BC* и *AD*, если известно, что *BD* = *AC*.

(Сб.12, 2019)

1. Основание треугольной пирамиды *DABC* – прямоугольный треугольник *ABC* (∠*C* = 90°). Высота пирамиды проходит через точку *C*.

а) Докажите, что противоположные рёбра пирамиды попарно перпендикулярны.

б) Найдите углы боковых рёбер *DA* и *DB* с плоскостью основания, если *AB* = 15, *BC* = 20, а угол между плоскостями *ABC* и *ABD* равен 45°.

(Сб.12, 2019)

1. Высота *PC* треугольной пирамиды *PABC* с вершиной *P* проходит через точку *C*. Прямые *PA* и *BC* перпендикулярны.

а) Докажите, что основание пирамиды – прямоугольный треугольник.

б) Найдите углы боковых рёбер *PA* и *PB* с плоскостью основания, если *AC* = 6, *BC* = 8, а расстояние от точки *P* до прямой *AB* равно 5.

(Сб.12, 2019)

1. Основание пирамиды *ABCD* – прямоугольный треугольник *ABC*. Высота пирамиды проходит через середину гипотенузы *AB*.

а) Докажите, что боковые рёбра пирамиды образуют равные углы с плоскостью основания.

б) Известно, что , а угол между боковой гранью *BDC* и плоскостью основания равен 60°. Найдите углы двух других боковых граней с плоскостью основания.

(Сб.12, 2019)

1. Основание пирамиды *ABCD* – равносторонний треугольник *ABC*, боковое ребро *AD* перпендикулярно плоскости основания, . Точки *M* и *N* – середины рёбер *BC* и *AB* соответственно.

а) Докажите, что угол между прямыми *AM* и *DN* равен 60°.

б) Найдите расстояние между этими прямыми, если *AB* =.

(Сб.12, 2019)

1. Основание треугольной пирамиды *ABCD* – равносторонний треугольник *ABC*. Боковое ребро *DA* перпендикулярно плоскости основания, *M* – середина ребра *BC*.

а) Докажите, что высота *AH* треугольника *ADM* перпендикулярна плоскости *BDC*.

б) Найдите угол между прямой *DM* и плоскостью *ADB*, если .

(Сб.12, 2019)

1. Ребро *SA* пирамиды *SABC* перпендикулярно плоскости основания *ABC*.

а) Докажите, что высота пирамиды, проведённая из точки *A*, делится плоскостью, проходящей через середины рёбер *AB*, *AC* и *SA*, пополам.

б) Найдите расстояние от вершины *A* до этой плоскости, если *SA* =, *AB* = *AC* = 5, *BC* =.

(Сб.3, Сб.4, 2020)

Ребро *SA* пирамиды *SABC* перпендикулярно плоскости основания *ABC*.

а) Докажите, что плоскость, проходящая через середины рёбер *AB*, *AC* и *SA*, делит высоту пирамиды, проведённую к грани *SBC*, на равные отрезки.

б) Найдите расстояние от вершины *A* до этой плоскости, если *SA* =, *AB* = *AC* = 5, *BC* =.

(Сб.7, 2020)

1. Ребро *SA* пирамиды *SABC* перпендикулярно плоскости основания *ABC*.

а) Докажите, что плоскость, проходящая через середины рёбер *AB*, *AC* и *SA*, отсекает от пирамиды *SABC* пирамиду, объём которой в 8 раз меньше объёма пирамиды *SABC*.

б) Найдите расстояние от вершины *A* до этой плоскости, если *SA* =, *AB* = *AC* = 10, *BC* =.

(Сб.3, Сб.4, 2020)

Ребро *SA* пирамиды *SABC* перпендикулярно плоскости основания *ABC*.

а) Докажите, что плоскость, проходящая через середины рёбер *AB*, *AC* и *SA*, параллельна плоскости *SBC*.

б) Найдите расстояние от вершины *A* до этой плоскости, если *SA* =, *AB* = *AC* = 10, *BC* =

(Сб.7, 2020)

Ребро *AD* пирамиды *DABC* перпендикулярно плоскости основания *ABC*. Известны длины рёбер пирамиды *AD* =, *AB* = *AC* = 10, *BC* =.

а) Докажите, что основания высот треугольников *ABC* и *DBC*, проведённых к стороне *BC*, совпадают.

б) Найдите расстояние от вершины *A* до плоскости, проходящей через середины рёбер *AB*, *AC* и *AD*.

(Сб.8, 2020)

1. Основание пирамиде *DABC* – равнобедренный треугольник *ABC*, в котором *AB*= *BC* = 13, *AC*= 24. Ребро *DB* перпендикулярно плоскости основания и равно 20.

а) Докажите, что плоскость, перпендикулярная *AC* и проходящая через точку *D*, проходит через точку *B*.

б) Найдите тангенс двугранного угла при ребре *AC*.

(Сб.8, 2020)

1. В пирамиде *SABC* известны длины рёбер: *AB*= *AC* = *SB* = *SC* =10, *BC* = *SA* = 12.

а) Докажите, что прямая, проходящая через середины рёбер *SA* и *BC*, перпендикулярна прямой *SA* и прямой *BC*.

б) Найдите расстояние между прямыми *SA* и *BC*.

(Сб.7, 2020)

В пирамиде *SABC* известны длины рёбер *AB*= *AC* = *SB* = *SC* =10, *BC* = *SA* = 12. Точка *K* − середина ребра *BC*.

а) Докажите, что плоскость *SAK* перпендикулярна плоскости *ABC*.

б) Найдите расстояние между прямыми *SA* и *BC*.

(Сб.4, 2020, Сб.3, 2019)

1. Дана пирамида *SABC*, в которой *SC* = *SB* = *AB*= *AC* =, *SA* = *BC* =.

а) Докажите, что ребро *SA* перпендикулярно ребру *BC*.

б) Найдите расстояние между ребрами *BC* и *SA*.

(***ЕГЭ-2019, досрочная волна***) Гущин

1. Дана пирамида *SABC*, в которой *SC* = *SB* = *AB*= *AC* =, *SA* = *BC* =.

а) Докажите, что ребро *SA* перпендикулярно ребру *BC*.

б) Найдите расстояние между ребрами *BC* и *SA*.

(***ЕГЭ-2019, досрочная волна***) Гущин

1. В пирамиде *SABC* известны длины рёбер: *AB*= *AC* =, *BC* = *SA*=, *SB* = *SC* =.

а) Докажите, что прямая *SA* перпендикулярна прямой *BC*.

б) Найдите угол между прямой *SA* и плоскостью *SBC*.

(***ЕГЭ-2019, досрочная волна***) Гущин

1. В пирамиде *SABC* известны длины рёбер: *AB*= *AC* =, *BC* = *SA*=, *SB* = *SC* =.

а) Докажите, что прямая *SA* перпендикулярна прямой *BC*.

б) Найдите угол между прямой *SA* и плоскостью *SBC*.

(***ЕГЭ-2019, досрочная волна***) Гущин

1. В треугольной пирамиде *ABCD* двугранные углы при рёбрах *AD* и *BC* равны. *AB*= *BD*= *DC*= *AC*= 5.

а) Докажите, что *AD* = *BC*.

б) Найдите объём пирамиды, если двугранные углы при *AD* и *BC* равны 60°.

(***ЕГЭ-2016, резервный день досрочной волны***)

1. В треугольной пирамиде *SABC* известны боковые рёбра: *SA* = *SB* = 13, *SC* =. Основанием высоты этой пирамиды является середина медианы *CM* треугольника *ABC*. Эта высота равна 12.

а) Докажите, что треугольник *ABC* равнобедренный.

б) Найдите объём пирамиды *SABC*.

(***ЕГЭ-2017, основная волна***) Гущин

1. В треугольной пирамиде *SABC* известны боковые рёбра: *SA* = *SB* = 7, *SC* = 5. Основанием высоты этой пирамиды является середина медианы *CM* треугольника *ABC*. Эта высота равна 4.

а) Докажите, что треугольник *ABC* равнобедренный.

б) Найдите объём пирамиды *SABC*.

(***ЕГЭ-2017, основная волна***) Гущин

1. В треугольной пирамиде *PABC* с основанием *ABC* известно, что *AB*= 13, *PB* = 15, cos∠*PBA* =. Основанием высоты этой пирамиды является точка *C*. Прямые *PA* и *BC* перпендикулярны.

а) Докажите, что треугольник *ABC* прямоугольный.

б) Найдите объём пирамиды *PABC*.

(***ЕГЭ-2017, резервный день основной волны***, Сб.12, 2019) Гущин

1. В треугольной пирамиде *PABC* с основанием *ABC* известно, что *AB*= 17, *PB* = 10, cos∠*PBA* =. Основанием высоты этой пирамиды является точка *C*. Прямые *PA* и *BC* перпендикулярны.

а) Докажите, что треугольник *ABC* прямоугольный.

б) Найдите объём пирамиды *PABC*.

(***ЕГЭ-2017, резервный день основной волны***) Гущин

1. Основание пирамиды *DABC* – треугольник *ABC* со сторонами *AC* = 6, *BC* = 8, *AB*= 10. Все боковые рёбра равны.

а) Докажите, что высота пирамиды проходит через середину отрезка *AB*.

б) Найдите расстояние между прямыми *DM* и *BC*, где *DM* – высота пирамиды *DABC*.

(Сб.12, 2019)

1. Точки *M* и *N* − середины рёбер соответственно *AB* и *CD* треугольной пирамиды *ABCD*, *O* − точка пересечения медиан грани *ABC*.

а) Докажите, что прямая *DO* проходит через середину отрезка *MN*.

б) Найдите угол между прямыми *MN* и *BC*, если *ABCD* – правильный тетраэдр.

(Сб.12, 2019)

1. Дана треугольная пирамида *SABC* с основанием *ABC*; *O* – точка пересечения медиан треугольника *ABC*.

а) Докажите, что плоскость, проходящая через прямую *AB* и середину отрезка *SO*, делит боковое ребро *SC* в отношении , считая от вершины *S*.

б) Найдите угол между боковым ребром и плоскостью основания пирамиды, если пирамида правильная, а её высота составляет  от высоты *SM* боковой грани *SAB*.

(Сб.12, 2019)

1. Дана треугольная пирамида *SABC*; *O* – точка пересечения медиан основания *ABC*.

а) Докажите, что плоскость, проходящая через прямую *AB* и середину *M* ребра *SC*, делит отрезок *SO* в отношении , считая от вершины *S*.

б) Найдите угол между прямой *BC* и плоскостью *ABM*, если пирамида правильная, а угол между прямой, проходящей через точку *M* и середину ребра *AB*, и прямой *SO* равен 45°.

(Сб.12, 2019)

1. Точка *M* – середина ребра *BC* треугольной пирамиды *ABCD*, точка *K* лежит на прямой *BD*, причём *B* – середина отрезка *DK*. Плоскость α проходит через прямую *KM* параллельно ребру *AB*.

а) Докажите, что плоскость α делит ребро *CD* в отношении , считая от точки *C*.

б) Найдите угол между плоскостью α и плоскостью *ABC*, если *DABC* – правильная пирамида с вершиной *D*, а её высота относится к стороне основания как .

(Сб.12, 2019)

1. В треугольной пирамиде *SABC* с основанием *ABC* точка *M* – середина ребра *SA*, точка *K −* середина ребра *SB*, *O* – точка пересечения медиан основания.

а) Докажите, что плоскость *CMK* делит отрезок *SO* в отношении , считая от вершины *S*.

б) Найдите угол между плоскостями *CMK* и *ABC*, если пирамида правильная, *SC* = 6, *AB*= 4.

(Сб.12, 2019)

1. На ребрах *AB* и *BC* треугольной пирамиды *ABCD* отмечены точки *M* и *N* соответственно, причём . Точки *P* и *Q* – середины рёбер *DA* и *DC* соответственно.

а) Докажите, что точки *P*, *Q*, *M* и *N* лежат в одной плоскости.

б) Найдите отношение объёмов многогранников, на которые плоскость *PQM* разбивает пирамиду.

(***ЕГЭ-2017, основная волна***, Сб.12, 2019) Гущин

1. На ребрах *AB* и *BC* треугольной пирамиды *ABCD* отмечены точки *M* и *N* соответственно, причём . Точки *P* и *Q* – середины рёбер *DA* и *DC* соответственно.

а) Докажите, что точки *P*, *Q*, *M* и *N* лежат в одной плоскости.

б) Найдите отношение объёмов многогранников, на которые плоскость *PQM* разбивает пирамиду.

(***ЕГЭ-2017, основная волна***, Сб.12, 2019)

1. Через вершину *D* треугольной пирамиды *DABC* и точку *M* точка пересечения медиан грани *ABC* проведена плоскость α, параллельная ребру *AC*. На медиане *DN* грани *ACD* отмечена точка *P*, причём .

а) Докажите, что прямая *BP* проходит через середину отрезка *DM*.

б) Найдите расстояние от точки *C* до плоскости α, если объём пирамиды *ABCD* равен 18, а площадь её сечения плоскостью α равна 4.

(Сб.12, 2019)

1. Основание пирамиды *SABCD* – квадрат *ABCD*. Боковое ребро *SD* перпендикулярно плоскости основания. Точка *M* – середина высоты пирамиды.

а) Докажите, что прямая *SB* параллельна плоскости *ACM*.

б) Найдите расстояние от точки *B* до плоскости *ACM*, если , а угол между плоскостью *ACM* и плоскостью основания пирамиды равен 45°.

(Сб.12, 2019)

1. Основание пирамиды *SABCD* – квадрат *ABCD*. Боковое ребро *SA* перпендикулярно плоскости основания.

а) Докажите, что плоскости *ASD* и *CSD* перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между прямыми *SC* и *BD*, если сторона основания равна 2, а высота пирамиды равна .

(Сб.12, 2019)

1. Основание пирамиды *SABCD* – квадрат *ABCD*. Боковое ребро *SA* перпендикулярно плоскости основания, а треугольник *BSD* равносторонний.

а) Докажите, что высота пирамиды равна стороне основания.

б) Найдите расстояние между прямыми *SC* и *BD*, если сторона основания равна .

(Сб.12, 2019)

1. Основание пирамиды *SABCD* – квадрат *ABCD*, боковое ребро *SA* перпендикулярно плоскости основания, *BC* = 2*SA*. Точка *M* – середина ребра *AB*.

а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью, проходящей через прямую *SM* параллельно *BD*, − равносторонний треугольник.

б) Найдите расстояние между прямыми *SM* и *BD*, если *AB*=.

(Сб.12, 2019)

1. Основание пирамиды *SABCD* – квадрат *ABCD*, высота пирамиды проходит через точку *D*.

а) Докажите, что все боковые грани пирамиды – прямоугольные треугольники.

б) Пусть *M* – середина бокового ребра *SC*. Найдите угол между прямыми *AM* и *BC*,если известно, что отношение высоты пирамиды к стороне её основания равно .

(Сб.12, 2019)

1. В основании пирамиды *SABCD* лежит прямоугольник *ABCD* со стороной *AB* = 3 и диагональю *BD* = 5. Все боковые рёбра пирамиды равны 3. На диагонали *BD* основания *ABCD* отмечена точка *E*, а на ребре *AS* – точка *F* так, что *SF* = *BE* = 2.

а) Докажите, что плоскость *CEF* параллельна ребру *SB*.

б) Плоскость *CEF* пересекает ребро *SD* в точке *Q*. Найдите расстояние от точки *Q* до плоскости *ABC*.

(Сб.3, Сб.4, 2020)

1. В основании пирамиды *SABCD* лежит прямоугольник *ABCD* со стороной  и диагональю *BD* = 7. Все боковые рёбра пирамиды равны 4. На диагонали *BD* основания *ABCD* отмечена точка *E*, а на ребре *AS* – точка *F* так, что *SF* = *BE* = 3.

а) Докажите, что плоскость *CEF* параллельна ребру *SB*.

б) Плоскость *CEF* пересекает ребро *SD* в точке *Q*. Найдите расстояние от точки *Q* до плоскости *ABC*.

(*ЕГЭ-2020, 2019, 2017, Т.Р.*)

1. В основании пирамиды *SABCD* лежит прямоугольник *ABCD* со стороной  и диагональю *BD* = 9. Все боковые рёбра пирамиды равны 4. На диагонали *BD* основания *ABCD* отмечена точка *E*, а на ребре *AS* – точка *F* так, что *SF* = *BE* = 4.

а) Докажите, что плоскость *CEF* параллельна ребру *SB*.

б) Плоскость *CEF* пересекает ребро *SD* в точке *Q*. Найдите расстояние от точки *Q* до плоскости *ABC*.

(*ЕГЭ-2020, 2019, 2017, Т.Р.*)

1. В основании четырёхугольной пирамиды *SABCD* лежит прямоугольник *ABCD* со сторонами *AB*= 4 и *BC* = 6. Длины боковых рёбер пирамиды *SA* = 3, *SB* = 5, *SD* =.

а) Докажите, что *SA* − высота пирамиды.

б) Найдите расстояние от вершины *A* до плоскости *SBC*.

(Сб.9, 2019, Сб.11, 2016)

1. В основании четырёхугольной пирамиды *SABCD* лежит прямоугольник *ABCD* со сторонами *AB*= 12 и *BC* =. Длины боковых рёбер пирамиды *SA* = 5, *SB* = 13, *SD* = 10.

а) Докажите, что *SA* – высота пирамиды.

б) Найдите расстояние от вершины *A* до плоскости *SBC*.

(Сб.11, 2016)

1. Основание пирамиды *SABCD* – прямоугольник *ABCD*. Высота *SH* пирамиды лежит в плоскости *CSD*.

а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью, проходящей через ребро *BC* и произвольную точку *M* ребра *SA*, отличную от *S* и *A*, – прямоугольная трапеция.

б) Найдите расстояние от вершины *S* до этой плоскости, если *H* – середина ребра *CD*, *M* – середина ребра *SA*, *SC* = *CD*, *SH* =.

(Сб.12, 2019)

1. Основание пирамиды *SABCD* – прямоугольник *ABCD*. Боковое ребро *SD* перпендикулярно плоскости основания.

а) Докажите, что прямые *SC* и *AD* перпендикулярны.

б) Пусть *M* – середина высоты пирамиды. Найдите расстояние от точки *B* до плоскости *ACM*, если *AB*= 8, *BC* = 6, а синус угла между плоскостью *ACM* и плоскостью основания пирамиды равен .

(Сб.12, 2019)

1. В основании четырёхугольной пирамиды *SABCD* лежит прямоугольник *ABCD* со сторонами *AB*= 8 и *BC* = 6. Длины боковых рёбер пирамиды *SA* =, *SB* =, *SD* =.

а) Докажите, что *SA* − высота пирамиды.

б) Найдите угол между прямыми *SC* и *BD*.

(***ЕГЭ-2015,*** Сб.6, Сб.9, 2019, Сб.5, 2018, Сб.11, 2017)

1. В основании четырёхугольной пирамиды *SABCD* лежит прямоугольник *ABCD* со сторонами *AB*= и *BC* = 2. Длины боковых рёбер пирамиды *SA* =, *SB* =, *SD* =.

а) Докажите, что *SA* − высота пирамиды.

б) Найдите угол между прямой *SC* и плоскостью *ASB*.

(***ЕГЭ-2015, основная волна***, Сб.11, 2016)

1. В основании четырёхугольной пирамиды *SABCD* лежит прямоугольник *ABCD* со сторонами *AB*= 4 и *BC* = 3. Длины боковых рёбер пирамиды *SA* =, *SB* =, *SD* =.

а) Докажите, что *SA* − высота пирамиды.

б) Найдите угол между прямой *SC* и плоскостью *ASB*.

(Сб.6, Сб.9, 2019, Сб.5, 2018, Сб.11, 2016)

1. Дана четырёхугольная пирамида *SABCD*, в основании которой лежит прямоугольник *ABCD*. Основанием высоты пирамиды является точка пересечения диагоналей основания. Известно, что *AB*=, *BC* =. Из точек *A* и *C* опущены перпендикуляры *AP* и *CQ* на ребро *SB*.

а) Докажите, что *P* – середина *BQ*.

б) Найдите угол между гранями *SBA* и *SBC*, если *AS*= 6.

(***ЕГЭ-2017, основная волна***, Сб.12, 2019)

Основанием четырёхугольной пирамиды *SABCD* является прямоугольник *ABCD*, причём *AB*=, *BC* =. Основанием высоты пирамиды является центр прямоугольника. Из вершин *A* и *C* опущены перпендикуляры *AP* и *CQ* на ребро *SB*.

а) Докажите, что *P* – середина отрезка *BQ*.

б) Найдите угол между гранями *SBA* и *SBC*, если *SD* = 6.

(***ЕГЭ-2017, основная волна***)

1. Основанием четырёхугольной пирамиды *SABCD* является прямоугольник *ABCD*, причём *AB*=, *BC* = 6. Основанием высоты пирамиды является центр прямоугольника. Из вершин *A* и *C* опущены перпендикуляры *AP* и *CQ* на ребро *SB*.

а) Докажите, что *P* – середина отрезка *BQ*.

б) Найдите угол между гранями *SBA* и *SBC*, если *SD* = 9.

(***ЕГЭ-2017, основная волна***)

1. Основание пирамиды *SABCD* – прямоугольник *ABCD*. Высота пирамиды лежит в грани *CSD*.

а) Докажите, что прямые *AD* и *SC* перпендикулярны.

б) Известно, что , высота пирамиды проходит через середину ребра *CD*, а угол между боковой гранью *BSC* и плоскостью основания равен 45°. Найдите углы остальных боковых граней с плоскостью основания.

(Сб.12, 2019)

1. Основанием пирамиды *SABCD* с равными боковыми рёбрами является прямоугольник *ABCD*. Плоскость α проходит через сторону *AB* основания и середину высоты пирамиды.

а) Докажите, что плоскость α делит боковое ребро *SD* в отношении , считая от вершины *S*.

б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью α, если *AB*= 6, *AD*= 8, а высота пирамиды равна 6.

(Сб.12, 2019)

1. Основание пирамиды *SABCD* – ромб *ABCD* с углом 60° при вершине *A*. Боковое ребро *SD* перпендикулярно плоскости основания и равно стороне основания.

а) Докажите, что прямые *AC* и *SB* перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между этими прямыми, если сторона основания пирамиды равна .

(Сб.12, 2019)

1. Основание пирамиды *SABCD* – параллелограмм *ABCD*. Боковые рёбра *SA* и *SD* равны. Точка *M* лежит на боковом ребре *SC* и не совпадает с его концами. Плоскость α проходит через точку *M* параллельно прямым *BC* и *SA*.

а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью α – равнобедренная трапеция.

б) Найдите расстояние от точки *A* до плоскости *α*, если боковая сторона этой трапеции равна меньшему основанию, а все рёбра пирамиды равны 1.

(Сб.12, 2019)

1. Основание пирамиды *SABCD* – параллелограмм *ABCD*, точки *M* и *N* – середины рёбер *AB* и *SC* соответственно.

а) Докажите, что плоскостью *DSM* проходит через середину отрезка *AN*.

б) Найдите угол между прямыми *SM* и *BN*, если пирамида правильная и все её рёбра равны.

(Сб.12, 2019)

1. Основание четырёхугольной пирамиды *SABCD* – параллелограмм *ABCD* с центром *O*. Точка *M −*середина ребра *SC*, *K* – середина ребра *SA*.

а) Докажите, что плоскость *BMK* делит ребро *SD* в отношении , считая от вершины *S*.

б) Найдите угол между плоскостями *BMK* и *ABC*, если пирамида правильная, *AB*= 10, *SC* = 8.

(Сб.12, 2019)

1. Основание четырёхугольной пирамиды *SABCD* – параллелограмм *ABCD*. Через середины рёбер *SC* и *AB* проведена плоскость, параллельная диагонали *BD* основания.

а) Докажите, что эта плоскость делит ребро *SB* в отношении , считая от вершины пирамиды.

б) В каком отношении эта плоскость делит объём пирамиды?

(Сб.12, 2019)

1. Основание четырёхугольной пирамиды *SABCD* – параллелограмм *ABCD*. Через середину ребра *SC* и точку *A* проведена плоскость, параллельная диагонали *BD* основания. Пусть *P* – точка пересечения этой плоскости с прямой *CD*.

а) Докажите, что *D* – середина отрезка *CP*.

б) Найдите объём большей из частей, на которые эта плоскость разбивает пирамиду, если объём пирамиды равен *V*.

(Сб.12, 2019)

1. Основание пирамиды *SABCD* − прямоугольная трапеция *ABCD* с основанием *AD* и прямым углом *D*. Высота *SH* пирамиды проходит через точку пересечения прямых *AB* и *CD*.

а) Докажите, что грань *ASD* –прямоугольный треугольник.

б) Найдите расстояние от точки *B* до плоскости *ASD*, если *AD*= 3*BC = 3*, ∠*BAD* = 45°, *SH* = 4.

(Сб.12, 2019)

1. В основании пирамиды *SABCD* лежит прямоугольная трапеция *ABCD* с основаниями *AD* и *BC*, причём *BC*= 2*AD*, и прямым углом при вершине *A*. Высота пирамиды проходит через точку *A*.

а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью, проходящей через прямую *AD* и середину *M* ребра *SC*, – прямоугольник.

б) Найдите косинус угла между прямыми *AM* и *CD*, если известно, что *AD*= *AB* и *SA* =*AB*.

(Сб.12, 2019)

1. Основание пирамиды *SABCD* – равнобедренная трапеция *ABCD* с основаниями *AD* и *BC*, причём *AD*= 2*BC* = 2*AB*. Высота *SH* пирамиды проходит через точку пересечения прямых *AB* и *CD*.

а) Докажите, что треугольник *SBD* прямоугольный.

б) Найдите расстояние от точки *C* до плоскости *ASD*, если *SH* = *BC* = 4.

(Сб.12, 2019)

1. Основание пирамиды *SABCD* – равнобедренная трапеция *ABCD* с основаниями *AD*= 2*BC*, *M*− середина бокового ребра *SA*, а высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей основания.

а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью *BMC* – прямоугольник.

б) Найдите расстояние между прямыми *AD* и *CM*, если *BC* = 6, высота пирамиды равна 16, а диагонали трапеции *ABCD* перпендикулярны.

(Сб.12, 2019)

1. В основании пирамиды *SABCD* лежит равнобедренная трапеция *ABCD* с основаниями *AD* и *BC*. Высота пирамиды проходит через точку *A*, *SH* – высота треугольника *BSC*. Известно, что *BC* = 2*AD*, *AB*= *AD*= 2*SA*.

а) Докажите, что *SH* = *CD*.

б) Найдите косинус угла между прямыми *CD* и *SH*.

(Сб.12, 2019)

1. Основание пирамиды *PABCD* – трапеция *ABCD*, причём ∠*BAD*+ ∠*ADC* = 90°. Плоскости *PAB* и *PCD* перпендикулярны плоскости основания, *K* – точка пересечения прямых *AB* и *CD*.

а) Докажите, что плоскости *PAB* и *PCD* перпендикулярны.

б) Найдите объём пирамиды *PKBC*, если *AB* = *BC* = *CD* = 3, а высота пирамиды *PABCD* равна 8.

(***ЕГЭ-2017, основная волна***, Сб.12, 2019)

1. Основанием четырёхугольной пирамиды *PABCD* является трапеция *ABCD*, причём ∠*BAD*+ ∠*ADC* = 90°. Плоскости *PAB* и *PCD* перпендикулярны плоскости основания, *K* – точка пересечения прямых *AB* и *CD*.

а) Докажите, что плоскости *PAB* и *PCD* перпендикулярны.

б) Найдите объём пирамиды *PKBC*, если *AB* = *BC* = *CD* = 4, а высота пирамиды *PABCD* равна 9.

(Сб.11, 2020)

1. Основание шестиугольной пирамиды *SABCDEF* – правильный шестиугольник *ABCDEF*. Высота пирамиды втрое больше стороны основания и проходит через точку *E*.

а) Докажите, что угол между боковой гранью *ASB* и плоскостью основания равен 60°.

б) Найдите расстояние от точки *C* до плоскости *ASB*, если сторона основания пирамиды равна 4.

(Сб.12, 2019)

1. Основание пирамиды *SABCDEF* – правильный шестиугольник *ABCDEF*. Высота пирамиды проходит через точку пересечения прямых *BC* и *DE*.

а) Докажите, что .

б) Найдите угол между прямыми *AF* и *SB*, если наибольшее боковое ребро пирамиды втрое больше стороны основания.

(Сб.12, 2019)

***13. Тела вращения: цилиндр, конус, шар***

1. В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки *A*, *B* и *C*, а на окружности другого основания – точка *C*1, причём *CC*1 – образующая цилиндра, а отрезок *AC* – диаметр основания. Известно, что *AB* = , *CC*1 =, ∠*ACB* = 30°.

а) Докажите, что угол между прямыми *AC*1 и *BC* равен 45°.

б) Найдите расстояние от точки *B* до прямой *AC*1.

(***ЕГЭ-2018, основная волна***, Сб.12, 2019)

1. В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки *A*, *B* и *C*, а на окружности другого основания – точка *C*1, причём *CC*1 – образующая цилиндра, а *AC* – диаметр основания. Известно, что ∠*ACB* = 45°, *AB* = , *CC*1 =  6.

а) Докажите, что угол между прямыми *AC*1 и *BC* равен 60°.

б) Найдите расстояние от точки *B* до прямой *AC*1.

(Сб.6, 2019)

1. В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки *A*, *B* и *C*, а на окружности другого основания – точка *C*1, причём *CC*1 – образующая цилиндра, а *AC* – диаметр основания. Известно, что ∠*ACB* = 45°, *AB* = 2, *CC*1 =.

а) Докажите, что угол между прямыми *AC*1 и *BC* равен 60°.

б) Найдите расстояние от точки *B* до прямой *AC*1.

(Сб.8, 2020)

1. Высота цилиндра равна 5, а радиус основания равен 26. Площадь сечения цилиндра плоскостью, проходящей параллельно оси цилиндра, равна 100.

а) Докажите, что перпендикуляр, опущенный из центра основания цилиндра на плоскость сечения, лежит в плоскости основания цилиндра.

б) Найдите расстояние от плоскости сечения до центра основания цилиндра.

(Сб.5, 2018)

1. В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки *A* и *B*, а на окружности другого основания – точки *B*1 и *C*1, причём *BB*1 – образующая цилиндра, а отрезок *AC*1 пересекает ось цилиндра.

а) Докажите, что прямые *AB* и *B*1*C*1 перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между прямыми *AC*1 и *B*1*C*1, если *AB* = 12, *BB*1 = 9, *B*1*C*1 = 8.

(***ЕГЭ-2018, основная волна***, Сб.12, 2019)

1. В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки *A* и *B*, а на окружности другого основания – точки *B*1 и *C*1, причём *BB*1 – образующая цилиндра, а отрезок *AC*1 пересекает ось цилиндра.

а) Докажите, что угол *ABC*1 прямой.

б) Найдите угол между прямыми *BB*1 и *AC*1, если *AB* = 6, *BB*1 = 15, *B*1*C*1 = 8.

(***ЕГЭ-2018, основная волна***)

В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки *A* и *B*, а на окружности другого основания – точки *B*1 и *C*1, причём *BB*1 – образующая цилиндра, а отрезок *AC*1 пересекает ось цилиндра.

а) Докажите, что прямые *AB* и *B*1*C*1 перпендикулярны.

б) Найдите угол между прямыми *BB*1 и *AC*1, если *AB* = 6, *BB*1 = 15, *B*1*C*1 = 8.

(***ЕГЭ-2018, основная волна***)

1. В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки *A* и *B*, а на окружности другого основания – точки *B*1 и *C*1, причём *BB*1 – образующая цилиндра, а отрезок *AC*1 пересекает ось цилиндра.

а) Докажите, что угол *ABC*1 прямой.

б) Найдите угол между прямыми *BB*1 и *AC*1, если *AB* = 10, *BB*1 = 7, *B*1*C*1 = 24.

(***ЕГЭ-2018, основная волна***)

1. Диаметр окружности основания цилиндра равен 26, образующая цилиндра равна 21. Плоскость пересекает его основания по хордам длины 24 и 10. Расстояние между этими хордами равно .

а) Докажите, что центры оснований цилиндра лежат по разные стороны от этой плоскости.

б) Найдите угол между этой плоскостью и плоскостью основания цилиндра.

(Сб.3, Сб.4, 2020)

Диаметр окружности основания цилиндра равен 26, образующая цилиндра равна 21. Плоскость пересекает его основания по хордам длины 24 и 10. Расстояние между этими хордами равно .

а) Докажите, что эта плоскость пересекает ось цилиндра.

б) Найдите угол между этой плоскостью и плоскостью основания цилиндра.

(Сб.7, 2020)

1. Диаметр окружности основания цилиндра равен 20, образующая цилиндра равна 28. Плоскость пересекает его основания по хордам длины 12 и 16. Расстояние между этими хордами равно .

а) Докажите, что центры оснований цилиндра лежат по одну сторону от этой плоскости.

б) Найдите тангенс угла между этой плоскостью и плоскостью основания цилиндра.

(Сб.3, 2018)

1. Диаметр окружности основания цилиндра равен 20, образующая цилиндра равна 28. Плоскость, пересекающая ось цилиндра, пересекает его основания по хордам длины 12 и 16.

а) Докажите, что сумма расстояний от этих хорд до оси цилиндра равна 14.

б) Найдите тангенс угла между этой плоскостью и плоскостью основания цилиндра.

(Сб.8, 2020)

1. Диаметр окружности основания цилиндра равен 20, образующая цилиндра равна 28. Плоскость α пересекает его основания по хордам длины 12 и 16.

а) Пусть *M* и *N* – середины этих хорд, *P* – точка пересечения прямой *MN* с осью цилиндра. Докажите, что расстояния от точки *P* до плоскостей основания цилиндра относятся как .

б) Найдите тангенс угла между плоскостью α и плоскостью основания цилиндра.

(Сб.12, 2019)

1. Диаметр окружности основания цилиндра равен 26, образующая цилиндра равна 21. Плоскость α пересекает его основания по хордам длины 24 и 10.

а) Пусть *M* и *N* – середины этих хорд, *P* – точка пересечения прямой *MN* с осью цилиндра. Докажите, что расстояния от точки *P* до плоскостей основания цилиндра относятся как .

б) Найдите тангенс угла между плоскостью α и плоскостью основания цилиндра.

(Сб.12, 2019)

1. В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки *A* и *B*, а на окружности другого основания – точки *B*1 и *C*1, причём *BB*1 – образующая цилиндра, а отрезок *AC*1 пересекает ось цилиндра.

а) Докажите, что прямые *AB* и *B*1*C*1 перпендикулярны.

б) Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, если *AB* = 6, *BB*1 = 15, *B*1*C*1 = 8.

(***ЕГЭ-2018, основная волна***)

1. В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки *A*, *B* и *C*, а на окружности другого основания – точка *C*1, причём *CC*1 – образующая цилиндра, а *AC* – диаметр основания. Известно, что ∠*ACB* = 30°, *AB* =, *CC*1= 4.

а) Докажите, что угол между прямыми *AC*1 и *BC* равен 60°.

б) Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

(Сб.6, 2019)

1. В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки *A*, *B* и *C*, а на окружности другого основания – точка *C*1, причём *CC*1 – образующая цилиндра, а *AC* – диаметр основания. Известно, что ∠*ACB* = 45°, *AB = CC*1 =.

а) Докажите, что угол между прямыми *BC*1 и *AC* равен 60°.

б) Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

(Сб.6, 2019)

1. В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки *A* и *B*, а на окружности другого основания – точки *B*1 и *C*1, причём *BB*1 – образующая цилиндра, а отрезок *AC*1 пересекает ось цилиндра.

а) Докажите, что прямые *AB* и *B*1*C*1 перпендикулярны.

б) Найдите площадь полной поверхности цилиндра, если *AB* = 6, *BB*1 = 15, *B*1*C*1 = 8.

(***ЕГЭ-2018, основная волна***)

1. В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки *A* и *B*, а на окружности другого основания – точки *B*1 и *C*1, причём *BB*1 – образующая цилиндра, а отрезок *AC*1 пересекает ось цилиндра.

а) Докажите, что прямые *AB* и *B*1*C*1 перпендикулярны.

б) Найдите объём цилиндра, если *AB* = 6, *BB*1 = 15, *B*1*C*1 = 8.

(***ЕГЭ-2018, основная волна***)

1. В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки *A*, *B* и *C*, а на окружности другого основания – точка *C*1, причём *CC*1 – образующая цилиндра, а *AC* – диаметр основания. Известно, что ∠*ACB* = 30°, *AB* =, *CC*1= 2.

а) Докажите, что угол между прямыми *AC*1 и *BC* равен 45°.

б) Найдите объём цилиндра.

(***ЕГЭ-2018, основная волна***) Гущин

1. В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки *A*, *B* и *C*, а на окружности другого основания − точка *C*1, причём *CC*1 – образующая цилиндра, а *AC* – диаметр основания. Известно, что ∠*ACB* = 45°, *AB* =, *CC*1= 4.

а) Докажите, что угол между прямыми *AC*1 и *BC* равен 60°.

б) Найдите объём цилиндра.

(***ЕГЭ-2018, основная волна***) Гущин

1. В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки *A*, *B* и *C*, а на окружности другого основания − точка *C*1, причём *CC*1 – образующая цилиндра, а *AC* – диаметр основания. Известно, что ∠*ACB* = 30°, *AB* =, *CC*1 = .

а) Докажите, что угол между прямыми *AC*1 и *BC* равен 45°.

б) Найдите объём цилиндра.

(Сб.6, 2019)

1. В одном основании прямого кругового цилиндра с высотой 3 и радиусом основания 8 проведена хорда *AB*, равная радиусу основания, а в другом его основании проведён диаметр *CD*, перпендикулярный *AB*. Построено сечение *ABNM*, проходящее через прямую *AB* перпендикулярно прямой *CD* так, что точка *C* и центр основания цилиндра, в котором проведён диаметр *CD*, лежат с одной стороны от сечения.

а) Докажите, что диагонали этого сечения равны между собой.

б) Найдите объём пирамиды *CABNM*.

(*ЕГЭ-2020, Т.Р., ЕГЭ-2019, Д.Р., ЕГЭ-2017, Т.Р.*, Сб.8, 2020)

1. В одном основании прямого кругового цилиндра с высотой 9 и радиусом основания 2 проведена хорда *AB*, равная радиусу основания, а в другом его основании проведён диаметр *CD*, перпендикулярный *AB*. Построено сечение *ABNM*, проходящее через прямую *AB* перпендикулярно прямой *CD* так, что точка *C* и центр основания цилиндра, в котором проведён диаметр *CD*, лежат с одной стороны от сечения.

а) Докажите, что диагонали этого сечения равны между собой.

б) Найдите объём пирамиды *CABNM*.

(*ЕГЭ-2020, Т.Р., ЕГЭ-2019, Д.Р., ЕГЭ-2017, Т.Р.*, Сб.8, 2020)

1. В одном основании прямого кругового цилиндра с высотой 12 и радиусом основания 6 проведена хорда *AB*, равная радиусу основания, а в другом его основании проведён диаметр *CD*, перпендикулярный *AB*. Построено сечение *ABNM*, проходящее через прямую *AB* перпендикулярно прямой *CD* так, что точка *C* и центр основания цилиндра, в котором проведён диаметр *CD*, лежат с одной стороны от сечения.

а) Докажите, что диагонали этого сечения равны между собой.

б) Найдите объём пирамиды *CABNM*.

(*ЕГЭ-2016, Т.Р.*)

1. Квадрат *ABCD* и цилиндр расположены таким образом, что *AB* – диаметр верхнего основания цилиндра, а *CD* лежит в плоскости нижнего основания и касается его окружности.

а) Докажите, что плоскость квадрата наклонена к плоскости основания цилиндра под углом 60°.

б) Найдите длину той части отрезка *CD*, которая находится внутри цилиндра, если образующая цилиндра равна .

(*ЕГЭ-2018, Т.Р.*)

1. Квадрат *ABCD* и цилиндр расположены таким образом, что *AB* – диаметр верхнего основания цилиндра, а *CD* лежит в плоскости нижнего основания и касается его окружности.

а) Докажите, что плоскость квадрата наклонена к плоскости основания цилиндра под углом 60°.

б) Найдите длину той части отрезка *CD*, которая находится внутри цилиндра, если образующая цилиндра равна .

(*ЕГЭ-2018, Т.Р.*)

1. Прямоугольник *ABCD* и цилиндр расположены таким образом, что *AB* – диаметр верхнего основания цилиндра, а *CD* лежит в плоскости нижнего основания и касается его окружности, приэтом плоскость прямоугольника наклонена к плоскости основания цилиндра под углом 60°.

а) Докажите, что *ABCD* – квадрат.

б) Найдите длину той части отрезка *BD*, которая находится снаружи цилиндра, если радиус цилиндра равен .

(*ЕГЭ-2018, Т.Р.*)

1. Прямоугольник *ABCD* и цилиндр расположены таким образом, что *AB* − диаметр верхнего основания цилиндра, а *CD* лежит в плоскости нижнего основания и касается его окружности, приэтом плоскость прямоугольника наклонена к плоскости основания цилиндра под углом 60°.

а) Докажите, что *ABCD* – квадрат.

б) Найдите длину той части отрезка *BD*, которая находится снаружи цилиндра, если радиус цилиндра равен 4.

(*ЕГЭ-2018, Т.Р.*)

1. Высота конуса равна 6, а радиус основания равен 8.

а) Докажите, что наибольшая площадь сечения конуса плоскостью, проходящей через его вершину, равна 50.

б) Найдите расстояние от центра основания конуса до этой плоскости.

(Сб.12, 2019)

1. Высота конуса равна 4, а радиус основания равен .

а) Докажите, что наибольшая площадь сечения конуса плоскостью, проходящей через его вершину, равна 25.

б) Найдите расстояние от центра основания конуса до этой плоскости.

(Сб.12, 2019)

1. Высота конуса равна радиусу его основания.

а) Докажите, что угол при вершине осевого сечения равен 90°.

б) Сечение конуса плоскостью, проходящей через его вершину, – равносторонний треугольник. Найдите расстояние от центра основания конуса до плоскости сечения, если радиус основания равен .

(Сб.12, 2019)

1. На окружности основания конуса с вершиной *S* отмечены точки *A*, *B* и *C* так, что *AB* = *BC*. Медиана *AM* треугольника *ACS* пересекает высоту конуса.

а) Точка *N* – середина отрезка *AC*. Докажите, что угол *MNB* прямой.

б) Найдите угол между прямыми *AM* и *SB*, если *AS* = 2, *AC* =.

(*ЕГЭ-2018, Т.Р.*)

1. На окружности основания конуса с вершиной *S* отмечены точки *A*, *B* и *C* так, что *AB* = *BC*. Медиана *AM* треугольника *ACS* пересекает высоту конуса.

а) Точка *N* – середина отрезка *AC*. Докажите, что угол *MNB* прямой.

б) Найдите угол между прямыми *AM* и *SB*, если *AS* = 2, *AC* =.

(*ЕГЭ-2018, Т.Р.*)

1. Точки *A*, *B* и *C* лежат на окружности основания конуса с вершиной *S*, причём *A* и *C* диаметрально противоположны. Точка *M* – середина *BC*.

а) Докажите, что прямая *SM* образует с плоскостью *ABC* такой же угол, как и прямая *AB* с плоскостью *SBC*.

б) Найдите угол между прямой *SA* и плоскостью *SBC*, если *AB* = 6, *BC* = 8 и *SC* = .

(Сб.6, 2019)

1. Точки *A*, *B* и *C* лежат на окружности основания конуса с вершиной *S*, причём *A* и *C* диаметрально противоположны. Точка *M* – середина *BC*.

а) Докажите, что прямая *SM* образует с плоскостью *ABC* такой же угол, как и прямая *AB* с плоскостью *SBC*.

б) Найдите угол между прямой *SA* и плоскостью *SBC*, если *AB* = 2, *BC* = 6 и *SC* = 5.

(Сб.6, 2019)

1. Радиус основания конуса с вершиной *S* и центром основания *O* равен 5, а его высота равна . Точка *M* – середина образующей *SA* конуса, а точки *N* и *B* лежат на основании конуса, причем прямая *MN* параллельна образующей конуса *SB*.

а) Докажите, что угол *ANO* – прямой.

б) Найдите угол между прямой *BM* и плоскостью основания конуса, если *AB* = 8.

(***ЕГЭ-2019, резервный день досрочной волны***)

1. В конусе с вершиной *S* и центром основания *O* радиус основания равен 13, а высота равна . Точки *A* и *B* – концы образующих, *M* – середина *SA*, *N* – точка в плоскости основания такая, что прямая *MN* параллельна прямой *SB*.

а) Докажите, что *ANO* – прямой угол.

б) Найдите угол между *MB* и плоскостью основания, если дополнительно известно, что *AB* = 10.

(***ЕГЭ-2019, резервный день досрочной волны***) Гущин

1. Высота конуса вдвое меньше образующей.

а) Докажите, что угол при вершине осевого сечения равен 120°.

б) Плоскость, проходящая через вершину конуса и хорду основания, образует угол 45° с плоскостью основания конуса. Найдите углы треугольного сечения.

(Сб.12, 2019)

1. Радиус основания конуса равен 6, а высота конуса равна 8. В конусе проведено сечение плоскостью, проходящей через вершину конуса и хорду окружности основания, длина которой равна 4.

а) Докажите, что плоскость, проходящая через середину этой хорды и высоту конуса, перпендикулярна этой хорде.

б) Найдите угол между плоскостью основания и плоскостью сечения.

(Сб.5, 2018)

1. Радиус основания конуса равен 13, а высота конуса равна 24. В конусе проведено сечение плоскостью, проходящей через вершину конуса и хорду окружности основания, длина которой равна 10.

а) Докажите, что плоскость, проходящая через середину этой хорды и высоту конуса, перпендикулярна этой хорде.

б) Найдите угол между плоскостью основания и плоскостью сечения.

(Сб.5, 2018)

1. Радиус основания конуса равен 4, а высота конуса равна . В конусе проведено сечение плоскостью, проходящей через вершину конуса и хорду окружности основания, длина которой равна .

а) Докажите, что плоскость, проходящая через середину этой хорды и высоту конуса, перпендикулярна этой хорде.

б) Найдите угол между плоскостью основания и плоскостью сечения.

(Сб.5, 2018)

1. Дан прямой круговой конус с вершиной *M*. Осевое сечение конуса – треугольник с углом 120° при вершине *M*. Образующая конуса равна . Через точку *M* проведено сечение конуса, перпендикулярное одной из образующих.

а) Докажите, что получившийся в сечении треугольник тупоугольный.

б) Найдите площадь сечения.

(*ЕГЭ-2016, Т.Р.*)

1. Угол при вершине осевого сечения конуса равен arccos.

а) Докажите, что площадь полной поверхности конуса в пять раз больше площади его основания.

б) Найдите угол в развёртке боковой поверхности.

(Сб.12, 2019)

1. Угол при вершине осевого сечения конуса равен arccos.

а) Докажите, что площадь полной поверхности конуса в четыре раза больше площади его основания.

б) Найдите угол в развёртке боковой поверхности.

(Сб.12, 2019)

1. Через центр *O* сферы проведена плоскость α. На сфере выбрана произвольная точка *A*, не лежащая в плоскости α. Точка *H* – проекция *A* на α. Через точку *H* в плоскости α проведена прямая, пересекающая сферу в точках *P* и *Q*.

а) Докажите, что прямая *PA* перпендикулярна прямой *QA*.

б) Найдите *PQ*, если *AH* = 3, а *H* делит *PQ* в отношении .

(Сб.9, 2019)

1. Через центр *O* сферы проведена плоскость α. На сфере выбрана произвольная точка *A*, не лежащая в плоскости α. Точка *H* – проекция *A* на α. Через точку *H* в плоскости α проведена прямая, пересекающая сферу в точках *P* и *Q*.

а) Докажите, что прямая *PA* перпендикулярна прямой *QA*.

б) Найдите *PQ*, если *AH* = 8, а *H* делит *PQ* в отношении .

(Сб.9, 2019)

1. Через центр *O* сферы проведена плоскость α. На сфере выбрана произвольная точка *A*, не лежащая в плоскости α. Точка *H* – проекция *A* на α. Через точку *H* в плоскости α проведена прямая, пересекающая сферу в точках *P* и *Q*.

а) Докажите, что прямая *PA* перпендикулярна прямой *QA*.

б) Найдите *PQ*, если , а *H* делит *PQ* в отношении .

(Сб.9, 2019)

1. Две параллельные плоскости, находящиеся на расстоянии 12 друг от друга, персесекают шар. Получившиеся сечения одинаковы, и площадь каждого из них равна 64π.

а) Докажите, что эти две плоскости равноудалены от центра шара.

б) Найдите площадь поверхности шара.

(Сб.5, 2018)

1. Проведены две параллельные плоскости по разные стороны от центра шара на расстоянии 7 друг от друга. Эти плоскости дают в сечении два круга, площади которых равны 9π и 16π.

а) Точка *H* – ортогональная проекция произвольной точки окружности меньшего круга на плоскость большего. Докажите, что точка *H* делит проходящий через неё диаметр большей окружности в отношении .

б) Найдите площадь поверхности шара.

(Сб.12, 2019)

1. Проведены две параллельные плоскости по одну сторону от центра сферы на расстоянии 3 друг от друга. Эти плоскости дают в сечении два круга, площади которых равны 18π и 24π.

а) Точка *H* – ортогональная проекция произвольной точки окружности меньшей окружности на плоскость большей. Докажите, что точка *H* делит проходящий через неё диаметр большей окружности в отношении .

б) Найдите объём шара, ограниченного данной сферой.

(Сб.12, 2019)

**Литература:**

1. ЕГЭ 2020. Математика. Профильный уровень. 10 вариантов. Типовые тестовые задания от разработчиков ЕГЭ / И.В. Ященко, М.А. Волчкевич, И.Р. Высоцкий, Р.К. Гордин, П.В. Семёнов, О.Н. Косухин, Д.А. Фёдоровых, А.И. Суздальцев, А.Р. Рязановский, В.А. Смирнов, А.В. Хачатурян, С.А. Шестаков, Д.Э. Шноль; под ред. И.В. Ященко. – М.: Издательство «Экзамен», 2020
2. ЕГЭ 2020. Математика. 14 вариантов. Профильный уровень. Типовые тестовые задания от разработчиков ЕГЭ / И.В. Ященко, М.А. Волчкевич, И.Р. Высоцкий, Р.К. Гордин, П.В. Семёнов, О.Н. Косухин, Д.А. Фёдоровых, А.И. Суздальцев, А.Р. Рязановский, В.А. Смирнов, А.В. Хачатурян, С.А. Шестаков, Д.Э. Шноль; под ред. И.В. Ященко. – М.: Издательство «Экзамен», издательство МЦНМО, 2020

ЕГЭ 2019. Математика. Профильный уровень. 14 вариантов. Типовые тестовые задания от разработчиков ЕГЭ / И.В. Ященко, М.А. Волчкевич, И.Р. Высоцкий, Р.К. Гордин, П.В. Семёнов, О.Н. Косухин, Д.А. Фёдоровых, А.И. Суздальцев, А.Р. Рязановский, В.А. Смирнов, А.В. Хачатурян, С.А. Шестаков, Д.Э. Шноль; под ред. И.В. Ященко. – М.: Издательство «Экзамен», 2019

1. ЕГЭ 2020. Математика. Профильный уровень. 36 вариантов. Типовые варианты экзаменационных заданий / И.В. Ященко, М.А. Волчкевич, И.Р. Высоцкий, Р.К. Гордин, П.В. Семёнов, О.Н. Косухин, Д.А. Фёдоровых, А.И. Суздальцев, А.Р. Рязановский, В.А. Смирнов, А.С. Трепалин, А.В. Хачатурян, С.А. Шестаков, Д.Э. Шноль; под ред. И.В. Ященко. – М.: Издательство «Экзамен», 2020

ЕГЭ 2019. Математика. Профильный уровень. 36 вариантов. Типовые тестовые задания от разработчиков ЕГЭ и 800 заданий части 2 / И.В. Ященко, М.А. Волчкевич, И.Р. Высоцкий, Р.К. Гордин, П.В. Семёнов, О.Н. Косухин, Д.А. Фёдоровых, А.И. Суздальцев, А.Р. Рязановский, И.Н. Сергеев, В.А. Смирнов, А.С. Трепалин, А.В. Хачатурян, С.А. Шестаков, Д.Э. Шноль; под ред. И.В. Ященко. – М.: Издательство «Экзамен», издательство МНЦМО, 2019

1. ЕГЭ 2020. Математика. Профильный уровень. 50 вариантов. Типовые варианты экзаменационных заданий от разработчиков ЕГЭ / И.В. Ященко, М.А. Волчкевич, И.Р. Высоцкий, Р.К. Гордин, П.В. Семёнов, О.Н. Косухин, Д.А. Фёдоровых, А.И. Суздальцев, А.Р. Рязановский, В.А. Смирнов, А.В. Хачатурян, С.А. Шестаков, Д.Э. Шноль; под ред. И.В. Ященко. – М.: Издательство «Экзамен», издательство МЦНМО, 2020

ЕГЭ 2019. Математика. Профильный уровень. 50 вариантов. Типовые тестовые задания от разработчиков ЕГЭ / И.В. Ященко, М.А. Волчкевич, И.Р. Высоцкий, Р.К. Гордин, П.В. Семёнов, О.Н. Косухин, Д.А. Фёдоровых, А.И. Суздальцев, А.Р. Рязановский, В.А. Смирнов, А.В. Хачатурян, С.А. Шестаков, Д.Э. Шноль; под ред. И.В. Ященко. – М.: Издательство «Экзамен», 2019

1. ЕГЭ-2018: Математика: 30 тренировочных вариантов экзаменационных работ для подготовки к единому государственному экзамену: профильный уровень / под ред. И.В. Ященко. – М.: АСТ, 2018
2. ЕГЭ. Математика. Профильный уровень: типовые экзаменационные варианты: 36 вариантов / под ред. И.В. Ященко. – М.: Издательство «Национальное образование», 2019

ЕГЭ. Математика. Профильный уровень: типовые экзаменационные варианты: 36 вариантов / под ред. И.В. Ященко. – М.: Издательство «Национальное образование», 2018

1. Ященко И.В. ЕГЭ 2020. Математика. Профильный уровень. 20 вариантов тестов от разработчиков ЕГЭ. Тематическая рабочая тетрадь / И.В. Ященко, С.А. Шестаков; под ред. И.В. Ященко. – М.: Издательство «Экзамен», МНЦМО, 2020

Ященко И.В. ЕГЭ 2019. Математика. Профильный уровень. 20 вариантов тестов от разработчиков ЕГЭ. Тематическая рабочая тетрадь / И.В. Ященко, С.А. Шестаков; под ред. И.В. Ященко. – М.: Издательство «Экзамен», МНЦМО, 2019

1. Ященко И.В., Шестаков С.А. Подготовка к ЕГЭ по математике в 2020 году. Профильный уровень. – М.: МЦНМО, 2020

Ященко И.В., Шестаков С.А. Подготовка к ЕГЭ по математике в 2019 году. Профильный уровень. Методические указания. – М.: МЦНМО, 2019

1. Семенов А.В. Математика. Профильный уровень. Единый государственный экзамен. Готовимся к итоговой аттестации: [учебное пособие] / А.В. Семенов, А.С. Трепалин, И.В. Ященко, И.Р. Высоцкий, П.И. Захаров; под ред. И.В. Ященко; Московский Центр непрерывного математического образования. – М.: «Интеллект-Центр», 2019

Семенов А.В. Единый государственный экзамен. Математика. Профильный уровень. Комплекс материалов для подготовки учащихся. Учебное пособие. / А.В. Семенов, А.С. Трепалин, И.В. Ященко, И.Р. Высоцкий, П.И. Захаров; под ред. И.В. Ященко; Московский Центр непрерывного математического образования. – М.: Интеллект-Центр, 2018

1. ~~Семенов А.В. Математика. Решение заданий повышенного и высокого уровней сложности. Как получить максимальный балл на ЕГЭ. Учебное пособие. / А.В. Семенов, И.В. Ященко, И.Р. Высоцкий, А.С. Трепалин, Е.А. Кукса; Московский центр непрерывного математического образования. – М.: Издательство «Интеллект-Центр», 2019~~
2. Методические материалы для председателей и членов предметных комиссий субъектов Российской федерации по проверке выполнения заданий с развернутым ответом экзаменационных работ ЕГЭ 2020 года. Математика. Методические рекомендации по оцениванию выполнения заданий ЕГЭ с развернутым ответом. / Руководитель комиссии по разработке контрольных измерительных материалов для проведения государственной итоговой аттестации по образовательным программам основного общего и среднего общего образования по математике И.В. Ященко, в.н.с. ФГБНУ «ФИПИ». Авторы: И.Р. Высоцкий, О.Н. Косухин, А.В. Семенов, А.С. Трепалин, М.А. Черняева. – Москва, ФИПИ, 2020

Методические материалы для председателей и членов предметных комиссий субъектов Российской федерации по проверке выполнения заданий с развернутым ответом экзаменационных работ ЕГЭ 2019 года. Математика. Методические рекомендации по оцениванию выполнения заданий ЕГЭ с развернутым ответом. / Руководитель комиссии по разработке контрольных измерительных материалов для проведения государственной итоговой аттестации по образовательным программам основного общего и среднего общего образования по математике И.В. Ященко, в.н.с. ФГБНУ «ФИПИ». Авторы-составители: И.Р. Высоцкий, О.Н. Косухин, А.В. Семенов, А.С. Трепалин. – Москва, ФИПИ, 2019

1. Гордин Р.К. ЕГЭ 2019. Математика. Геометрия. Стереометрия. Задача 14 (профильный уровень) / Под ред. И.В. Ященко. – М.: МЦНМО, 2019