**Задание 16 (C4)**

**Планиметрия**

**ЕГЭ-2020**

Две окружности касаются внешним образом в точке *K*. Прямая *AB* касается первой окружности в точке *A*, а второй – в точке *B*. Прямая *BK* пересекает первую окружность в точке *D*, прямая *AK* пересекает вторую окружность в точке *C*.

а) Докажите, что прямые *AD* и *BC* параллельны.

б) Найдите площадь треугольника *AKB*, если известно, что радиусы окружностей равны 4 и 1.

(***ЕГЭ-2021, 2020, 2019, 2018, 2017, 2016, 2015, 2014, Демо***, Сб.11, 2020)

***1. Треугольник***

1. Прямая, проходящая через середину *M* гипотенузы *AB* прямоугольного треугольника *ABC*, перпендикулярна *CM* и пересекает катет *AC* в точке *K*. При этом *AK*: *KC* = 1:2.

а) Докажите, что ∠*BAC* = 30°.

б) Пусть прямые *MK* и *BC* пересекаются в точке *P*, а прямые *AP* и *BK* − в точке *Q*. Найдите *KQ*, если *BC* =.

(*ЕГЭ-2020, 2017, Т.Р.*)

1. Прямая, проходящая через середину *M* гипотенузы *AB* прямоугольного треугольника *ABC*, перпендикулярна *CM* и пересекает катет *AC* в точке *K*. При этом *AK*: *KC* = 1:2.

а) Докажите, что ∠*BAC* = 30°.

б) Пусть прямые *MK* и *BC* пересекаются в точке *P*, а прямые *AP* и *BK* − в точке *Q*. Найдите *KQ*, если *BC* =.

(*ЕГЭ-2020, 2017, Т.Р.*)

1. Прямая, проходящая через середину *M* гипотенузы *AB* прямоугольного треугольника *ABC*, перпендикулярна *CM* и пересекает катет *AC* в точке *K*. При этом *AK*: *KC* = 1:2.

а) Докажите, что ∠*BAC* = 30°.

б) Пусть прямые *MK* и *BC* пересекаются в точке *P*, а прямые *AP* и *BK* − в точке *Q*. Найдите *KQ*, если *BC* =.

(Сб.1, Сб.3, Сб.4, 2020)

1. Медианы *AA*1, *BB*1, *CC*1 треугольника *ABC* пересекаются в точке *M*. Известно, что *AC* = 3*MB*.

а) Докажите, что треугольник *ABC* прямоугольный.

б) Найдите сумму квадратов медиан *AA*1 и *CC*1, если известно, что *AC* = 10.

(*ЕГЭ-2018, Т.Р., ЕГЭ-2015, Д.Р.,* Сб.11, 2015)

1. Медианы *AA*1, *BB*1, *CC*1 треугольника *ABC* пересекаются в точке *M*. Известно, что *AC* = 3*MB*.

а) Докажите, что треугольник *ABC* прямоугольный.

б) Найдите сумму квадратов медиан *AA*1 и *CC*1, если известно, что *AC* = 12.

(*ЕГЭ-2018, Т.Р., ЕГЭ-2015, Д.Р.*)

1. Медианы *AA*1, *BB*1, *CC*1 треугольника *ABC* пересекаются в точке *M*. Известно, что *AC* = 3*MB*.

а) Докажите, что треугольник *ABC* прямоугольный.

б) Найдите сумму квадратов медиан *AA*1 и *CC*1, если известно, что *AC* = 30.

(Сб.12, 2019)

1. В прямоугольном треугольнике *ABC* точки *M* и *N* − середины гипотенузы *AB* и катета *BC* соответственно. Биссектриса угла *BAC* пересекает прямую *MN* в точке *L*.

а) Докажите, что треугольники *AML* и *BLC* подобны.

б) Найдите отношение площадей этих треугольников, если cos∠*BAC* =.

(***ЕГЭ-2016, основная волна***) Гущин

1. На продолжении стороны *АС* за вершину *A* треугольника *АВС* отмечена точка *D* так, что *AD* = *AB*. Прямая, проходящая через точку *A*, параллельно *BD*, пересекает сторону *BC* в точке *M*.

а) Докажите, что *AM* − биссектриса треугольника *АВС*.

б) Найти *SAMBD*, если *AC* = 30, *BC* = 18 и *AB* = 24.

(***ЕГЭ-2016, резервный день основной волны***) Гущин

1. В треугольнике *ABC* проведены биссектрисы *AA*1 и *CC*1, *K* и *M* – основания перпендикуляров, опущенных из точки *B* на прямые *AA*1 и *CC*1.

а) Докажите, что *MK* и *AC* параллельны.

б) Найдите площадь треугольника *KBM*, если известно, что *AC* = 10, *BC* = 6 и *AB* = 8.

(Сб.12, 2019)

1. В треугольнике *ABC* проведены биссектрисы *AA*1 и *CC*1, *K* и *M* – основания перпендикуляров, опущенных из точки *B* на прямые *AA*1 и *CC*1.

а) Докажите, что *MK* и *AC* параллельны.

б) Найдите площадь треугольника *KBM*, если известно, что *AC* = 13, *BC* = 5 и *AB* = 12.

(Сб.5, 2018)

1. В прямоугольном треугольнике *ABC* точка *M* лежит на катете *AC*, а точка *N* лежит на продолжении катета *BC* за точку *C*, причём *CM = BC* и *CN = AC*. Отрезки *CP* и *CQ* − биссектрисы треугольников *ACB* и *NCM* соответственно.

а) Докажите, что *CP* и *СQ* перпендикулярны.

б) Найдите *PQ*, если *BC* = 3, а *AC* = 5.

(***ЕГЭ-2019, резервный вариант***) Гущин

1. а) Докажите, что высота, опущенная на гипотенузу прямоугольного треугольника, делит треугольник на два подобных треугольника.

б) Найдите высоту прямоугольного треугольника, опущенную на гипотенузу, если известно, что основание этой высоты делит гипотенузу на отрезки, равные 1 и 4.

(Сб.7, 2020)

1. В прямоугольном треугольнике *АВС* с прямым углом *С* точки *М* и *N* − середины катетов *АС* и *ВС* соответственно, *СН* − высота.

а) Докажите, что прямые *МН* и *NH* перпендикулярны.

б) Пусть *P* − точка пересечения прямых *АС* и *NH*, а *Q* − точка пересечения прямых *BC* и *МН*. Найдите площадь треугольника *PQM*, если *АН* = 4 и *ВН* = 2.

(***ЕГЭ-2016, резервный день основной волны***) Гущин

1. В прямоугольном треугольнике *АВС* с прямым углом *С* точки *М* и *N* − середины катетов *АС* и *ВС* соответственно, *СН* − высота.

а) Докажите, что прямые *МН* и *NH* перпендикулярны.

б) Пусть *P* − точка пересечения прямых *АС* и *NH*, а *Q* − точка пересечения прямых *BC* и *МН*. Найдите площадь треугольника *PQM*, если *АН* = 12 и *ВН* = 3.

(***ЕГЭ-2016, резервный день основной волны***) Гущин

1. В прямоугольном треугольнике *ABC* точка *M* лежит на катете *AC*, а точка *N* лежит на продолжении катета *BC* за точку *C*, причём *CM* = *BC* и *CN* = *AC*.

а) Отрезки *CH* и *CF* − высоты треугольников *ACB* и *NCM* соответственно. Докажите, что *CH* и *CF* перпендикулярны.

б) Прямые *BM* и *AN* пересекаются в точке *L*. Найдите *LM*, если *BC* = 4, *AC* = 6.

(***ЕГЭ-2020, основная волна***)

1. В прямоугольном треугольнике *ABC* точка *M* лежит на катете *AC*, а точка *N* лежит на продолжении катета *BC* за точку *C*, причём *CM* = *BC* и *CN* = *AC*.

а) Отрезки *CH* и *CF* − высоты треугольников *ACB* и *NCM* соответственно. Докажите, что *CH* и *CF* перпендикулярны.

б) Прямые *BM* и *AN* пересекаются в точке *L*. Найдите *LM*, если *BC* = 2, *AC* = 5.

(***ЕГЭ-2020, основная волна***) Гущин

1. В прямоугольном треугольнике *ABC* из вершины прямого угла *C* проведены медиана *CM* и высота *CH*.

а) Докажите, что биссектриса *CL* треугольника *ABC* является также биссектрисой треугольника *CMH*.

б) Найдите *CL*, если известно, что *CM* = 10, *CH* = 6.

(Сб.8, 2020, Сб.12, 2019)

1. Медиана *AM* и биссектриса *CD* прямоугольного треугольника *ABC* с прямым углом *B* пересекаются в точке *O*.

а) Докажите, что .

б) Найдите площадь треугольника *ABC*, если *CO* = 9, *OD* = 5.

(Сб.7, 2020)

1. Высота *CH*, проведённая из вершины прямого угла прямоугольного треугольника *ABC*, пересекает биссектрису *AD* в точке *K*.

а) Докажите, что .

б) Найдите острые углы треугольника *ABC*, если .

(Сб.12, 2019)

1. Высоты, проведённые из вершин *A*, *B* и *С* треугольника *ABC*, равны 20, 15 и 12 соответственно.

а) Докажите, что треугольник *ABC* прямоугольный.

б) Найдите длину биссектрисы треугольника, проведённой из вершины *С*.

(Сб.12, 2019)

1. На катете *BC* прямоугольного треугольника *ABC* с прямым углом при вершине C и с углом 30° при вершине *A* вне треугольника построен равносторонний треугольник *BCD*. Прямая *AD* пересекает сторону *BC* в точке *К*.

а) Докажите, что *CK*: *KB* = 1:2.

б) Прямая, проходящая через точку *K* перпендикулярно *CD*, пересекает гипотенузу *AB* в точке *M*. Найдите отношение *AM* : *MB*.

(Сб.12, 2019)

1. На каждой стороне равностороннего треугольника взято по точке. Стороны треугольника с вершинами в этих точках соответственно перпендикулярны сторонам исходного треугольника.

а) Докажите, что треугольник с вершинами в указанных точках также равносторонний.

б) Найдите отношение площади этого треугольника к площади исходного.

(Сб.12, 2019)

1. В треугольнике *АВС* известно, что *АВ* = *BC* = 4. Медиана *AM* равна 3.

а) Докажите, что угол *AMB* тупой.

б) Найдите отрезок *AC*.

(Сб.7, 2020)

1. В равнобедренном треугольнике *АВС* с основанием *AC* проведена биссектриса *AD*. Из точки *D* параллельно основанию проведена прямая, пересекающая сторону *АВ* в точке *K*.

а) Докажите, что треугольник *AKD* − равнобедренный.

б) Найдите длину отрезка *AD*, если *AC* = 5, *АВ* = *BC* = 20.

(Сб.7, 2020)

1. На отрезке *BD* взята точка *C*. Биссектриса *BL* равнобедренного треугольника *ABC* с основанием *BC* является боковой стороной равнобедренного треугольника *BLD* с основанием *BD*.

а) Докажите, что треугольник *DCL* равнобедренный.

б) Известно, что cos∠*ABC* =. В каком отношении прямая *DL* делит сторону *AB*?

(Сб.10, Сб.12, 2019)

1. На отрезке *BD* взята точка *C*. Биссектриса *BL* равнобедренного треугольника *ABC* с основанием *BC* является боковой стороной равнобедренного треугольника *BLD* с основанием *BD*.

а) Докажите, что треугольник *DCL* равнобедренный.

б) Известно, что cos∠*ABC* =. В каком отношении прямая *DL* делит сторону *AB*?

(Сб.10, 2019)

1. В равнобедренном треугольнике *ABC* (*AB = BC*) из точки *B* проведена высота *BE*. На стороне *BC* взята точка *D* так, что *BD*: *DC* = 1:4.

а) Докажите, что площадь треугольника *CDE* в два раза больше площади треугольника *ABD*.

б) В каком отношении прямая *AD* делит высоту *BE* треугольника *ABC*, считая от вершины *B*?

(Сб.7, 2020)

1. В равнобедренном тупоугольном треугольнике *ABC* на продолжение боковой стороны *BC* опущена высота *AH*. Из точки *H* на сторону *AB* и основание *AC* опущены перпендикуляры *HK* и *HM* соответственно.

а) Докажите, что отрезки *AM* и *MK* равны.

б) Найдите *MK*, если *AB* = 5, *AC* = 8.

(Сб.11, 2020)

1. Медиана *AM* и высота *CH* равнобедренного треугольника *ABC* (*AB = BC*) пересекаются в точке *K*. Известно, что *CK* = 5, *KH* = 1.

а) Докажите, что *AH* : *BH* = 1:4.

б) Найдите площадь треугольника *ABC*.

(Сб.12, 2019)

1. Дан треугольник *ABC* со сторонами *AB* = 3, *AC* = и медианой *AM* = 4.

а) Докажите, что медиана *AM* перпендикулярна стороне *AB*.

б) Найдите высоту треугольника *ABC*, проведённую из вершины *A*.

(Сб.8, 2020)

1. Медиана *AM* треугольника *ABC* продолжена за точку *М* на расстояние *MD* = *AM*.

а) Докажите, что *CD* = *AB*.

б) Найдите площадь треугольника *ABC*, если *AB* = 10, *AC* = 12, *AM* = 5.

(Сб.8, 2020, Сб.12, 2019)

1. Медианы *AM* и *BN* треугольника *ABC* перпендикулярны и пересекаются в точке *P*.

а) Докажите, что *CP* = *AB*.

б) Найдите площадь треугольника *ABC*, если известно, что *AC* = 3 и *BC* = 4.

(Сб.12, 2019)

1. Медианы *AM* и *BN* треугольника *ABC* перпендикулярны и пересекаются в точке *P*.

а) Докажите, что *CP* = *AB*.

б) Найдите площадь треугольника *ABC*, если известно, что *AC* = 4 и *BC* = 7.

(Сб.5, 2018)

1. Медианы *AM* и *BN* треугольника *ABC* перпендикулярны и пересекаются в точке *P*.

а) Докажите, что *CP* = *AB*.

б) Найдите площадь треугольника *ABC*, если известно, что *AC* = 6 и *BC* = 7.

(Сб.5, 2018)

1. Медианы треугольника *ABC* пересекаются в точке *M*.

а) Докажите, что треугольники *AMB*, *AMC* и *BMC* равновелики.

б) Известно, что треугольник *ABC* прямоугольный, а точка *M* удалена от катетов на расстояния 3 и 4. Найдите расстояние от этой точки до гипотенузы.

(Сб.12, 2019)

1. Медианы *AA*1, *BB*1, *CC*1 треугольника *ABC* пересекаются в точке *M*. Точки *A*2, *B*2, *C*2 – середины отрезков *MA*, *MB* и *MC* соответственно.

а) Докажите, что площадь шестиугольника *A*1*B*2*C*1*A*2*B*1*C*2 вдвое меньше площади треугольника *ABC*.

б) Найдите сумму квадратов всех сторон этого шестиугольника, если известно, что *AB* = 5, *BC* = 8 и *AC* = 10.

(*ЕГЭ-2014, Д.Р.*, Сб.2, Сб.3, Сб.4, 2020, Сб.11, 2015)

1. Медианы *AA*1, *BB*1, *CC*1 треугольника *ABC* пересекаются в точке *M*. Точки *A*2, *B*2, *C*2 – середины отрезков *MA*, *MB* и *MC* соответственно.

а) Докажите, что площадь шестиугольника *A*1*B*2*C*1*A*2*B*1*C*2 вдвое меньше площади треугольника *ABC*.

б) Найдите сумму квадратов всех сторон этого шестиугольника, если известно, что *AB* = 4, *BC* = 7 и *AC* = 8.

(*ЕГЭ-2014, Д.Р.*, Сб.3, Сб.4, 2020, Сб.11, 2015)

1. В треугольнике *ABC* проведена биссектриса *BK*.

а) Докажите, что .

б) Найдите площадь треугольника *ABC* , если *AB* = 13, *BC* = 7 и *BK* =.

(*ЕГЭ-2020, Т.Р.*)

1. В треугольнике *ABC* проведена биссектриса *BK*.

а) Докажите, что .

б) Найдите площадь треугольника *ABC* , если *AB* = 15, *BC* = 13 и *BK* =.

(*ЕГЭ-2020, Т.Р.*)

1. В треугольнике *ABC* известно, что *AM* − биссектриса.

а) Докажите, что отношение перпендикуляров, опущенных на *AM* из точек *B* и *C* соответственно, равно *BM*: *MC*.

б) Найдите *AM*, если *AB* = 8, *AC* = 6, ∠*BAC*= 60°.

(Сб.7, 2020)

1. В треугольнике *ABC* проведена биссектриса угла *AM*. Прямая, проходящая через вершину *B* перпендикулярно *AM*, пересекает сторону *AC* в точке *N*, *AB* = 6, *BC* = 5, *AC* = 9.

а) Докажите, что биссектриса угла *C* делит отрезок *MN* пополам.

б) Пусть *P* – точка пересечения биссектрис треугольника *ABC*. Найдите отношение *AP*: *PN*.

(***ЕГЭ-2014, резервный день основной волны***) Гущин

1. В треугольнике *ABC* на продолжении стороны *AC* за вершину *A* отложен отрезок *AD*, равный стороне *AB*. Прямая, проходящая через точку *A* параллельно *BD*, пересекает сторону *BC* в точке *M*.

а) Докажите, что *AM* − биссектриса угла *BAC.*

б) Найдите площадь трапеции *AMBD*, если площадь треугольника *ABC* равна 54 и известно отношение *AC*: *AB* = 5:4.

(*ЕГЭ-2020, Т.Р. 10-11кл., ЕГЭ-2017, Т.Р. 10кл.*)

1. В треугольнике *ABC* на продолжении стороны *AC* за вершину *A* отложен отрезок *AD*, равный стороне *AB*. Прямая, проходящая через точку *A* параллельно *BD*, пересекает сторону *BC* в точке *M*.

а) Докажите, что *AM* − биссектриса угла *BAC.*

б) Найдите площадь трапеции *AMBD*, если площадь треугольника *ABC* равна 216 и известно отношение *AC*: *AB* = 5:4.

(*ЕГЭ-2020, Т.Р. 10-11кл., ЕГЭ-2017, Т.Р. 10кл.*)

1. На продолжении стороны *AC* за вершину *A* треугольника *ABC* отложен отрезок *AD*, равный стороне *AB*. Прямая, проходящая через точку *A* параллельно *BD*, пересекает сторону *BC* в точке *M*.

а) Докажите, что *AM* − биссектриса угла *BAC.*

б) Найдите площадь трапеции *AMBD*, если площадь треугольника *ABC* равна 180 и известно отношение *AC*: *AB* = 3:2.

(Сб.3, Сб.4, 2020)

1. Дан остроугольный треугольник *ABC*. Биссектриса внутреннего угла при вершине *B* пересекает биссектрису внешнего угла при вершине *C* в точке *M*, а биссектриса внутреннего угла при вершине *C* пересекает биссектрису внешнего угла при вершине *B* в точке *N*.

а) Докажите, что 2∠*BMN* = ∠*ACB*.

б) Найдите *BM*, если *AB* = *AC* = 5, *BC* = 6.

(Сб.2, Сб.3, Сб.4, 2020)

1. Дан остроугольный треугольник *ABC*. Биссектриса внутреннего угла при вершине *B* пересекает биссектрису внешнего угла при вершине *C* в точке *M*, а биссектриса внутреннего угла при вершине *C* пересекает биссектрису внешнего угла при вершине *B* в точке *N*.

а) Докажите, что ∠*NMB* = ∠*NCA*.

б) Найдите *CN*, если *AB* = *AC* = 10, *BC* = 16.

(Сб.4, 2020)

1. Дан остроугольный треугольник *ABC*. Биссектриса внутреннего угла при вершине *B* пересекает биссектрису внешнего угла при вершине *C* в точке *M*, а биссектриса внутреннего угла при вершине *C* пересекает биссектрису внешнего угла при вершине *B* в точке *N*.

а) Докажите, что 2∠*CNM* = ∠*ABC*.

б) Найдите *CN*, если *AB* = *AC* = 13, *BC* = 10.

(Сб.2, Сб.3, Сб.4, 2020)

1. Дан остроугольный треугольник *ABC*. Биссектриса внутреннего угла при вершине *B* пересекает биссектрису внешнего угла при вершине *C* в точке *M*, а биссектриса внутреннего угла при вершине *C* пересекает биссектрису внешнего угла при вершине *B* в точке *N*.

а) Докажите, что ∠*CNM* = ∠*MBC*.

б) Найдите *CN*, если *AB* = *AC* = 15, *BC* = 18.

(Сб.2, Сб.3, Сб.4, 2020)

1. Дан остроугольный треугольник *ABC*. Биссектриса внутреннего угла при вершине *B* пересекает биссектрису внешнего угла при вершине *C* в точке *M*, а биссектриса внутреннего угла при вершине *C* пересекает биссектрису внешнего угла при вершине *B* в точке *N*.

а) Докажите, что ∠*CNM* = ∠*MBA*.

б) Найдите *CN*, если *AB* = *AC* = 17, *BC* = 16.

(Сб.4, 2020)

1. Высоты *BB*1 и *CC*1 остроугольного треугольника *ABC* пересекаются в точке *H.*

а) Докажите, что ∠*AHB*1 = ∠*ACB*.

б) Найдите *BC*, если *AH* = 4 и ∠*BAC* = 60°.

(***ЕГЭ-2014, основная волна Запад***) Гущин

1. Высоты *BB*1 и *CC*1 остроугольного треугольника *ABC* пересекаются в точке *H.*

а) Докажите, что ∠*AHB*1 = ∠*ACB*.

б) Найдите *BC*, если *AH* = и ∠*BAC* = 60°.

(***ЕГЭ-2014, основная волна Запад***, Сб.9, Сб.10, 2019, Сб.11, 2015) Гущин

1. Высоты *BB*1 и *CC*1 остроугольного треугольника *ABC* пересекаются в точке *H.*

а) Докажите, что ∠*AHB*1 = ∠*ACB*.

б) Найдите *BC*, если *AH* = 21 и ∠*BAC* = 30°.

(***ЕГЭ-2014, основная волна Запад***) Гущин

1. Высоты *BB*1 и *CC*1 остроугольного треугольника *ABC* пересекаются в точке *H.*

а) Докажите, что ∠*AHB*1 = ∠*ACB*.

б) Найдите *BC*, если *AH* = и ∠*BAC* = 30°.

(Сб.10, 2019)

1. В остроугольном треугольнике *ABC* проведены высоты *AK* и *CM*. На них из точек *M* и *K* опущены перпендикуляры *ME* и *KH* соответственно.

а) Докажите, что прямые *EH* и *AC* параллельны.

б) Найдите отношение *ЕН*: *АС*, если ∠*АВС* = 30°.

(***ЕГЭ-2016, основная волна Запад***) Гущин

1. В остроугольном треугольнике *АВС* проведены высоты *АК* и *CM*. На них из точек *M* и *K* опущены перпендикуляры *МЕ* и *КН* соответственно.

а) Докажите, что прямые *EH* и *AC* параллельны.

б) Найдите отношение *ЕН*: *АС*, если ∠*АВС* = 60°.

(***ЕГЭ-2016, основная волна Запад***) Гущин

1. В остроугольном треугольнике *АВС* проведены высоты *АК* и *CM*. На них из точек *M* и *K* опущены перпендикуляры *МЕ* и *КН* соответственно.

а) Докажите, что прямые *EH* и *AC* параллельны.

б) Найдите отношение *ЕН*: *АС*, если ∠*АВС* = 45°.

(***ЕГЭ-2016, основная волна Запад***) Гущин

1. Высоты *AA*1 и *BB*1 остроугольного треугольника *АВС* пересекаются в точке *Н*. Точки *M* и *N* – середины отрезков *AB* и *CH* соответственно.

а) Докажите, что треугольники *A*1*MB*1 и *A*1*NB*1 равнобедренные.

б) Найдите площадь четырёхугольника *A*1*MB*1*N*, если *АВ* = 6, *MN* = 4.

(Сб.12, 2019)

1. Пусть *AA*1, *BB*1 и *CC*1 – высоты остроугольного треугольника *АВС* с углом 45° при вершине *C*.

а) Докажите, что треугольник *A*1*B*1*C*1 прямоугольный.

б) Найдите отношение, в котором высота *A*1*B*1делит отрезок *B*1*C*1, если известно, что *ВC* = 2*B*1*C*1.

(Сб.12, 2019)

1. Дан треугольник *АВС*. Точки *M*1, *M*2, *M*3 – середины сторон *АВ*, *ВС* и *АС*, а точки *H*1, *H*2, *H*3 – основания высот, лежащие на тех же сторонах.

а) Докажите, что из отрезков *H*1*M*2, *H*2*M*3, и *H*3*M*1 можно построить треугольник.

б) Найдите его периметр, если периметр треугольника *АВС* равен *a*.

(Сб.12, 2019)

1. В треугольнике *ABC* угол *ABC* тупой, *H* − точка пересечения продолжений высот, угол *AHC* равен 60°.

а) Докажите, что угол *ABC* равен 120°.

б) Найдите *BH*, если *AB* = 7, *BC* = 8.

(***ЕГЭ-2018, досрочная волна Запад***) Гущин

1. В треугольнике *ABC* проведены две высоты *BM* и *CN*, причём *AM*: *CM* = 2:3 и cos∠*BAC* =.

а) Докажите, что угол *ABC* тупой.

б) Найдите отношение площадей треугольников *BMN* и *ABC*.

(*ЕГЭ-2016, Т.Р.*)

1. Дан треугольник *ABC* со сторонами *AB* = 3, *AC* =и медианой *AM* = 4.

а) Докажите, что медиана *AM* перпендикулярна стороне *AB*.

б) Найдите высоту треугольника *ABC*, проведённую из вершины *A*.

(Сб.12, 2019)

1. В треугольнике *ABC* биссектриса *BE* и медиана *AD* перпендикулярны.

а) Докажите, что *CE* = 2*AE*.

б) Найдите стороны треугольника *ABC*, если *BE* = *AD* = 8.

(Сб.12, 2019)

1. Биссектриса *AD* треугольника *ABC* делит его медиану *BM* пополам.

а) Докажите, что площадь треугольника *ACD* вдвое больше площади треугольника *ABD*.

б) В каком отношении медиана *BM* делит биссектрису *AD*?

(Сб.12, 2019)

1. В треугольнике *ABC* высота *BD* равна 6, медиана *CE* равна 5, расстояние от точки пересечения отрезков *BD* и *CE* до стороны *AC* равно 1.

а) Докажите, что *CD* : *AD* = 1:4.

б) Найдите площадь треугольника *AEC*.

(Сб.12, 2019)

1. Высота *AH* и медиана *AM* треугольника *ABC* делят угол *BAC* треугольника *ABC* на три равные части, причём точка *H* лежит между *B* и *M*. Из точки *M* опущен перпендикуляр *MK* на сторону *AC*.

а) Докажите, что *MK* = *BH*.

б) Найдите углы треугольника *ABC*.

(Сб.12, 2019)

1. В треугольнике *ABC* проведена медиана *CM*, а в треугольниках *AMC* и *BMC −* биссектрисы *MP* и *MQ* соответственно.

а) Докажите, что отрезок *PQ* параллелен стороне *AB*.

б) Найдите площадь треугольника *MPQ*, если *AC* = 3, *BC* = 42, *CM* =.

(*ЕГЭ-2020, Т.Р.*)

1. В треугольнике *ABC* проведена медиана *CM*, а в треугольниках *AMC* и *BMC −* биссектрисы *MP* и *MQ* соответственно.

а) Докажите, что отрезок *PQ* параллелен стороне *AB*.

б) Найдите площадь треугольника *MPQ*, если *AC* = 5, *BC* = 12, *CM* =.

(*ЕГЭ-2020, Т.Р.*)

1. В треугольнике *ABC* точка *D* делит сторону *AB* пополам, а точка E лежит на стороне *BC*, причём отрезок *BE* в 3 раза меньше стороны *BC*. Отрезки *AE* и *CD* пересекаются в точке *O*, *AE* = 5, *OC* = 4.

а) Докажите, что *CD* = *AE*.

б) Найдите сторону *AB*, если ∠*AOC* = 120°.

(Сб.12, 2019)

1. Точки *B*1 и *C*1 лежат на сторонах *AC* и *AB* треугольника *ABC*, причём *AB*1: *B*1*C* = *AC*1: *C*1*B*. Прямые *BB*1 и *CC*1 пересекаются в точке *O*.

а) Докажите, что прямая *AO* делит пополам сторону *BC*.

б) Найдите отношение площади четырёхугольника *AB*1*OC*1 к площади треугольника *ABC*, если известно, что *AB*1: *B*1*C* = *AC*1: *C*1*B* = 1:2.

(Сб.12, 2019)

1. Точки *B*1 и *C*1 лежат на сторонах *AC* и *AB* треугольника *ABC*, причём *AB*1: *B*1*C* = *AC*1: *C*1*B*. Прямые *BB*1 и *CC*1 пересекаются в точке *O*.

а) Докажите, что прямая *AO* делит пополам сторону *BC*.

б) Найдите отношение площади четырёхугольника *AB*1*OC*1 к площади треугольника *ABC*, если известно, что *AB*1: *B*1*C* = *AC*1: *C*1*B* = 1:3.

(Сб.3, Сб.4, 2020)

1. На сторонах *AB*, *BC* и *AC* треугольника *ABC* отмечены точки *K*, *L* и *M*, причём *AK* : *KB*= 2:3, *BL*: *LC*= 1:2, *CM* : *MA* = 3:1.

а) Докажите, что площади треугольников *BKL* и *KLM* равны.

б) В каком отношении отрезок *KL* делит отрезок *BM*?

(Сб.7, 2020)

1. На сторонах *AB* и *AC* треугольника *ABC* отмечены точки *K* и *L* соответственно, причём *AK* : *KB*= 4:7 и *AL*: *LC* = 3:2. Прямая *KL* пересекает продолжение стороны *BC* в точке *M*.

а) Докажите, что отношение площадей треугольников *AKL* и *ABC* равно 12:55.

б) Найдите отношение *CM*: *BC*.

(Сб.7, 2020)

1. На стороне *AB* треугольника *ABC* отмечены точки *M* и *N* так, что *AM = MN = NB*. Через точки *M* и *N* проведены прямые, параллельные *BC*, пересекающие сторону *AC* в точках *E* и *F* соответственно.

а) Докажите, что треугольники *AME*, *ANF* и *ABC* подобны.

б) Найдите площадь четырёхугольника *EMNF*, если площадь треугольника *ABC* равна 1.

(Сб.7, 2020)

1. Прямая, параллельная стороне, делит площадь треугольника пополам.

а) Докажите, что эта прямая делит две другие стороны треугольника в отношении , считая от вершины.

б) Найдите длину отрезка этой прямой, заключённого между сторонами треугольника, если сторона треугольника, параллельная этой прямой, равна 36.

(Сб.7, 2020)

***2. Четырёхугольники***

1. Точка *E* − середина стороны *BC* квадрата *ABCD*. Серединные перпендикуляры к отрезкам *АЕ* и *ЕС* пересекаются в точке *O*.

а) Докажите, что ∠*AOE* = 90°.

б) Найдите *BO*: *OD*.

(***ЕГЭ-2018, резервный вариант***) Гущин

1. Прямая, проходящая через вершину *B* прямоугольника *ABCD* перпендикулярно диагонали *AC*, пересекает сторону *AD* в точке *M*,равноудалённой от вершин *B* и *D*.

а) Докажите, что ∠*ABM* = ∠*DBC* = 30°.

б) Найдите расстояние от центра прямоугольника до прямой *CM*, если *BC* = 9.

(*ЕГЭ-2020, 2017, Т.Р.*)

Прямая, проходящая через вершину *B* прямоугольника *ABCD* перпендикулярно диагонали *AC*, пересекает сторону *AD* в точке *M*,равноудалённой от вершин *B* и *D*.

а) Докажите, что ∠*ABM* = 30°.

б) Найдите расстояние от центра прямоугольника до прямой *CM*, если *BC* = 9.

(*ЕГЭ-2019, Д.Р.*)

1. Прямая, проходящая через вершину *B* прямоугольника *ABCD* перпендикулярно диагонали *AC*, пересекает сторону *AD* в точке *M*,равноудалённой от вершин *B* и *D*.

а) Докажите, что лучи *BM* и *BD* делят угол *ABC* на три равные части.

б) Найдите расстояние от центра прямоугольника до прямой *CM*, если *BC* =.

(***ЕГЭ-2016, резервный день досрочной волны****, ЕГЭ-2020, 2017, Т.Р.*) Гущин

Прямая, проходящая через вершину *B* прямоугольника *ABCD* перпендикулярно диагонали *AC*, пересекает сторону *AD* в точке *M*,равноудалённой от вершин *B* и *D*.

а) Докажите, что ∠*ABM* = 30°.

б) Найдите расстояние от центра прямоугольника до прямой *CM*, если *BC* =.

(*ЕГЭ-2019, Д.Р.*)

1. Прямая, проходящая через вершину *B* прямоугольника *ABCD* перпендикулярно диагонали *AC*, пересекает сторону *AD* в точке *M*,равноудалённой от вершин *B* и *D*.

а) Докажите, что ∠*ABM* = ∠*DBC* = ∠*MBD*.

б) Найдите расстояние от центра прямоугольника до прямой *CM*, если *BC* = 42.

(***ЕГЭ-2016, резервный день досрочной волны***) Гущин

1. Диагональ *AC* прямоугольника *ABCD* с центром *O* образует со стороной *AB* угол 30°. Точка *E* лежит вне прямоугольника, причём ∠*BEC* = 120°.

а) Докажите, что ∠*CBE* = ∠*COE*.

б) Прямая *OE* пересекает сторону *AD* прямоугольника в точке *K*. Найдите *EK*, если известно, что *BE*= 40 и *CE* = 24.

(Сб.8, 2020, Сб.6, Сб.12, 2019)

1. Диагональ *AC* прямоугольника *ABCD* с центром *O* образует со стороной *AB* угол 30°. Точка *E* лежит вне прямоугольника, причём ∠*BEC* = 120°.

а) Докажите, что ∠*CBE* = ∠*COE*.

б) Прямая *OE* пересекает сторону *AD* прямоугольника в точке *K*. Найдите *EK*, если известно, что *BE*= 12 и *CE* = 20.

(Сб.6, 2019)

1. Отрезок, соединяющий вершину *A* ромба *ABCD* с серединой стороны *BC*, равен стороне ромба.

а) Докажите, что высота ромба, проведённая из вершины *C*, делит сторону *AD* на отрезки, один из которых втрое больше другого.

б) Найдите диагональ *AC* ромба, если известно, что сторона ромба равна .

(Сб.8, 2020, Сб.12, 2019)

1. На сторонах *AD* и *BC* параллелограмма *ABCD* взяты соответственно точки *M* и *N*, причём *M* – середина *AD*, а *BN*: *NC* = 1:3.

а) Докажите, что прямые *AN* и *AC* делят отрезок *BM* на три равные части.

б) Найдите площадь четырёхугольника, образованного пересечениями прямых *AN*, *AC*, *BD* и *BC*, если площадь параллелограмма *ABCD* равна 40.

(Сб.8, 2020, Сб.12, 2019)

На сторонах *KN* и *LM* параллелограмма *KLMN* взяты соответственно точки P и *Q*, причём *P* – середина *KN*, а *LQ*: *QN* = 1:3.

а) Докажите, что прямые *KQ* и *KM* делят отрезок *BM* на три равные части.

б) Найдите площадь четырёхугольника, образованного пересечениями прямых *KQ*, *KM*, *LN* и *LM*, если площадь параллелограмма *KLMN* равна 40.

(Сб.9, 2019)

1. На сторонах *AD* и *BC* параллелограмма *ABCD* взяты соответственно точки *M* и *N*, причём *M* – середина *AD*, а *BN*: *NC* = 1:3.

а) Докажите, что прямые *AN* и *AC* делят отрезок *BM* на три равные части.

б) Найдите площадь четырёхугольника, вершины которого находятся в точках *C*, *N* и точках пересечения прямой *BM* с прямыми *AN* и *AC*, если площадь параллелограмма *ABCD* равна 48.

(*ЕГЭ-2014, Т.Р. 10кл.*, Сб.10, 2019)

1. Точка *M* – середина стороны *AD* параллелограмма *ABCD*. Из вершины *A* проведены два луча, которые разбивают отрезок *BM* на три равные части.

а) Докажите, что один из лучей содержит диагональ параллелограмма.

б) Найдите площадь четырёхугольника, ограниченного двумя проведёнными лучами и прямыми *BD* и *BC*, если площадь параллелограмма *ABCD* равна 40.

(*ЕГЭ-2014, Т.Р. 10кл.*, Сб.10, 2019)

1. На сторонах *AD* и *BC* параллелограмма *ABCD* взяты соответственно точки *M* и *N*, причём *M* – середина *AD*, а *BN*: *NC* = 1:3.

а) Докажите, что прямые *AN* и *AC* делят отрезок *BM* на три равные части.

б) Найдите площадь четырёхугольника, образованного пересечениями прямых *AN*, *AC*, *BD* и *BC*, если площадь параллелограмма *ABCD* равна 30.

(*ЕГЭ-2015, П.Р. ФЦТ ФИПИ*)

1. В параллелограмме *ABCD* точка *M* − середина стороны *AD*, *P* − точка пересечения отрезка *BM* с диагональю *AC*.

а) Докажите, что прямая *DP* проходит через середину стороны *AB*.

б) Биссектриса угла *BAC* пересекает отрезок *BM* в точке *Q*. Найдите отношение *PM*: *BQ*, если *AB*: *AC* = 1:3.

(Сб.8, 2020, Сб.12, 2019)

1. На диагонали *BD* параллелограмма *ABCD* отмечены точки *P* и *Q*, причём *BP* = *PQ* = *QD*.

а) Докажите, что прямые *AP* и *AQ* проходят через середины *M* и *N* сторон *BC* и *CD* соответственно.

б) Найдите отношение площади пятиугольника *CMPQN* к площади параллелограмма *ABCD*.

(Сб.12, 2019)

На диагонали *LN* параллелограмма *KLMN* отмены точки *P* и *Q*, причём *LP* = *PQ* = *QN*.

а) Докажите, что прямые *KP* и *KQ* проходят через середины сторон параллелограмма.

б) Найдите отношение площади параллелограмма *KLMN* к площади пятиугольника *MRPQS*, где *R* − точка пересечения *KP* со стороной *LM*, *S* − точка пересечения *KQ* с *MN*.

(Сб.9, 2019) исправлена опечатка в задании

1. На диагонали параллелограмма взяли точку, отличную от её середины. Из неё на все стороны параллелограмма (или их продолжения) опустили перпендикуляры.

а) Докажите, что четырёхугольник, образованный основаниями этих перпендикуляров, является трапецией.

б) Найдите площадь полученной трапеции, если площадь параллелограмма равна 16, а один из его углов равен 60°.

(*ЕГЭ-2014, Т.Р.*, Сб.10, 2019)

1. На диагонали параллелограмма взяли точку, отличную от её середины. Из неё на все стороны параллелограмма (или их продолжения) опустили перпендикуляры.

а) Докажите, что четырёхугольник, образованный основаниями этих перпендикуляров, является трапецией.

б) Найдите площадь полученной трапеции, если площадь параллелограмма равна 24, а один из его углов равен 45°.

(*ЕГЭ-2014, Т.Р.*, Сб.10, 2019)

1. На сторонах *AB*, *BC*, *CD* и *AD* параллелограмма *ABCD* отмечены точки *K*, *L*, *M* и *N* соответственно, причём .

а) Докажите, что четырёхугольник *KLMN* – параллелограмм, а его центр совпадает с центром параллелограмма *ABCD*.

б) Найдите отношение площадей параллелограммов *KLMN* и *ABCD*, если известно, что .

(Сб.12, 2019)

1. На сторонах *AB*, *BC*, *CD* и *AD* параллелограмма *ABCD* отмечены точки *K*, *L*, *M* и *N* соответственно, причём .

а) Докажите, что четырёхугольник *KLMN* – параллелограмм, а его центр совпадает с центром параллелограмма *ABCD*.

б) Найдите отношение площадей параллелограммов *KLMN* и *ABCD*, если известно, что *AK*: *KB*= 3:2.

(Сб.5, 2018)

1. Вершины ромба расположены (по одной) на сторонах параллелограмма.

а) Докажите, что центры ромба и параллелограмма совпадают.

б) Найдите отношение площадей ромба и параллелограмма, если стороны ромба параллельны диагоналям параллелограмма, а диагонали параллелограмма относятся как 2:3.

(Сб.12, 2019)

1. В трапеции *ABCD* боковая сторона *AB* перпендикулярна основаниям. Из точки *A* на сторону *CD* опустили перпендикуляр *AH*. На стороне *AB* отмечена точка *E* так, что прямые *CD* и *CE* перпендикулярны.

а) Докажите, что прямые *BH* и *ED* параллельны.

б) Найдите отношение *BH* к *ED*, если ∠*BCD* = 120°.

(Сб.11, Сб.8, 2020)

1. а) Докажите, что в равнобедренной трапеции высота, опущенная из конца меньшего основания, отсекает от большего основания отрезок, равный средней линии трапеции.

б) Диагональ равнобедренной трапеции равна 10 и образует угол 60° с основанием. Найдите среднюю линию трапеции.

(Сб.7, 2020)

1. В трапеции *ABCD* с основаниями *AD* и *BC* известно, что *АВ = BC = CD* =*AD*.

а) Докажите, что *АС* ⊥ *CD*.

б) Найдите углы трапеции.

(Сб.8, 2020, Сб.12, 2019)

1. В равнобедренной трапеции *ABCD* основание *AD* в три раза больше основания *ВС*.

а) Докажите, что высота *CH* трапеции разбивает основание *AD* на отрезки, один из которых вдвое больше другого.

б) Найдите расстояние от вершины *C* до середины диагонали *BD*, если *AD* = 36 и *AC* = 26.

(***ЕГЭ-2018, П.Р.***)

1. В равнобедренной трапеции *ABCD* основание *AD* в три раза больше основания *ВС*.

а) Докажите, что высота *CH* трапеции разбивает основание *AD* на отрезки, один из которых вдвое больше другого.

б) Найдите расстояние от вершины *C* до середины диагонали *BD*, если *AD* = 18 и *AC* =.

(***ЕГЭ-2018, П.Р.***)

1. В равнобедренной трапеции *ABCD* основание *AD* в три раза больше основания *ВС*.

а) Докажите, что высота *BH* трапеции разбивает основание *AD* на отрезки, один из которых вдвое больше другого.

б) Найдите расстояние от вершины *B* до середины диагонали *AC*, если *AD* = 72 и *AC* = 50.

(Сб.6, 2019)

1. Диагональ равнобедренной трапеции перпендикулярна боковой стороне, а угол при основании трапеции равен 120°.

а) Докажите, что одно из оснований трапеции вдвое больше другого.

б) Найдите стороны трапеции, если её диагональ равна .

(Сб.12, 2019)

1. В трапеции *ABCD* с основаниями *BC* и *AD* углы *ABD* и *ACD* прямые.

а) Докажите, что *АВ* = *CD*.

б) Найдите *AD*, если *AB* = 2, *BC* = 7.

(***ЕГЭ-2018, резервный вариант***) Гущин

1. Диагонали трапеции перпендикулярны боковым сторонам.

а) Докажите, что трапеция равнобедренная.

б) Найдите площадь трапеции, если известно, что её основания равны 10 и 26.

(Сб.8, 2020, Сб.12, 2019)

1. Дана трапеция *ABCD*. Биссектриса угла *BAD* пересекает продолжение основания *BC* в точке *K*.

а) Докажите, что треугольник *ABK* равнобедренный.

б) Найдите биссектрису *BM* треугольника *ABK*, если известно, что *AD* = 10, *BC* = 2 и *AB* = *CD* = 5.

(Сб.8, 2020, Сб.12, 2019)

1. Боковая сторона *CD* трапеции *ABCD* равна основанию *AD*.

а) Докажите, что *CA* – биссектриса угла *BCD*.

б) Прямая, проходящая через вершину *C* перпендикулярно *CD*, пересекает боковую сторону *AB* в точке *M*. Найдите отношение *BM*: *AM*, если известно, что *AD* = *CD* = 2*BC* и ∠*ADC* = 60°.

(Сб.8, 2020, Сб.12, 2019)

1. В трапеции *ABCD* основания *AD* и *BC*. Диагональ *AC* разбивает её на два равнобедренных треугольника с основаниями *AD* и *AB*.

а) Докажите, что луч *DB −* биссектриса угла *ADC* .

б) Найдите *AB*, если известны длины диагоналей трапеции: *BD* = 8 и *AC* = 5.

(Сб.3, Сб.4, 2020)

1. Дана трапеция *ABCD* с основаниями *AD* и *BC*. Диагональ *BD* разбивает её на два равнобедренных треугольника с основаниями *AD* и *CD*.

а) Докажите, что луч *AC −* биссектриса угла *BAD* .

б) Найдите *CD*, если известны диагонали трапеции: *AC* = 12 и *BD* = 6,5.

(*ЕГЭ-2017, Т.Р. 11кл., Т.Р. 10кл.*)

1. Дана трапеция *ABCD* с основаниями *AD* и *BC*. Диагональ *BD* разбивает её на два равнобедренных треугольника с основаниями *AD* и *CD*.

а) Докажите, что луч *AC −* биссектриса угла *BAD* .

б) Найдите *CD*, если известны диагонали трапеции: *AC* = 15 и *BD* = 8,5.

(*ЕГЭ-2017, Т.Р. 11кл., Т.Р. 10кл.*)

В трапеции *ABCD* основания *AD* и *BC*. Диагональ *AC* разбивает её на два равнобедренных треугольника с основаниями *AD* и *AB*.

а) Докажите, что луч *DB* – биссектриса угла *ADC*.

б) Найдите *AB*, если известны длины диагоналей трапеции: *BD* = 15 и *AC* = 8,5.

(Сб.3, Сб.4, 2020)

1. Диагональ *BD* четырёхугольника *ABCD* с параллельными основаниями *AD* и *BC* разбивает его на два равнобедренных треугольника с основаниями *AD* и *DC*.

а) Докажите, что луч *AC −* биссектриса угла *BAD*.

б) Найдите *CD*, если известны диагонали четырёхугольника *BD* = 5 и *AC* = 8.

(*ЕГЭ-2016, Т.Р.*, Сб.12, 2019)

1. Диагональ *BD* четырёхугольника *ABCD* с параллельными основаниями *AD* и *BC* разбивает его на два равнобедренных треугольника с основаниями *AD* и *DC*.

а) Докажите, что луч *AC −* биссектриса угла *BAD*.

б) Найдите *CD*, если известны диагонали четырёхугольника *BD* = 4 и *AC* =.

(*ЕГЭ-2016, Т.Р.*)

1. Диагональ *AC* разбивает трапецию *ABCD* с основаниями *AD* и *BC*, из которых *AD* большее, на два подобных треугольника.

а) Докажите, что ∠*ABC* = ∠*ACD*.

б) Найдите отрезок, соединяющий середины оснований трапеции, если известно, что *BC* = 18, *AD* = 50, cos∠*CAD* =.

(***ЕГЭ-2014, резервный день второй волны***)

1. Диагонали *AC* и *BD* трапеции *ABCD* пересекаются в точке *O*. Площади треугольников *AOD* и *BOC* равны соответственно 49 и 36.

а) Докажите, что площади треугольников *AOB* и *COD* равны.

б) Найдите площадь трапеции.

(Сб.8, 2019)

1. На стороне *CD* трапеции *ABCD* отмечена точка *M*, которая является серединой этой стороны.

а) Доказать, что *SABM* =*SABCD*.

б) На стороне *CD* отмечена точка *K*, такая что *SBCK* =*SAKD*, причем *AD* = 2*BC*. Расстояние от точки *D* до прямой *AB* равно 10. Найдите расстояние от точки *K* до стороны *AB*.

(***ЕГЭ-2020, резервный день основной волны***) Гущин

1. На стороне *CD* трапеции *ABCD* отмечена точка *M*, которая является серединой этой стороны.

а) Доказать, что *SABM* =*SABCD*.

б) На стороне *CD* отмечена точка *K*, такая что *SBCK* =*SAKD*, причем *AD* = 2*BC*. Расстояние от точки *D* до прямой *AB* равно 15. Найдите расстояние от точки *K* до стороны *AB*.

(***ЕГЭ-2020, резервный день основной волны***) Гущин

1. Дана трапеция *ABCD* с основаниями *AD* и *BC*. Биссектриса угла *ADC* проходит через середину боковой стороны *AB*.

а) Докажите, что сумма оснований трапеции равна боковой стороне *CD*.

б) Найдите площадь трапеции *ABCD*, если *AB* = 8, *BC* = 2 и *CD* = 10.

(Сб.12, 2019)

1. Через вершину *B* трапеции *ABCD* основания *AD* и *BC* проведена прямая, параллельная диагонали *AC*. Пусть эта прямая пересекается с продолжением основания *AD* в точке *E*.

а) Докажите, что треугольник *DBE* равновелик трапеции *ABCD*.

б) Найдите площадь трапеции, диагонали которой равны 10 и 24, а средняя линия равна 13.

(Сб.12, 2019)

1. В трапеции *ABCD* основания *BC* и *AD* относятся как 1:2. Пусть *K* − середина диагонали *AC*. Прямая *DK* пересекает сторону *AB* в точке *L*.

а) Докажите, что *AL* = 2*BL*.

б) Найдите площадь четырехугольника *BCKL*, если известно, что площадь трапеции *ABCD* равна 9.

(Сб.8, 2020, Сб.12, 2019)

1. В трапеции *ABCD* основание *AD* в два раза больше основания *ВС*. Внутри трапеции взяли точку *М* так, что углы *ABM* и *DCM* прямые.

а) Докажите, что *AM = DM*.

б) Найдите угол *BAD*, если угол *ADC* равен 55°, а расстояние от точки *М* до прямой *AD* равно стороне *BC*.

(***ЕГЭ-2017, основная волна***)

1. В трапеции *ABCD* основание *AD* в два раза меньше основания *ВС*. Внутри трапеции взяли точку *М* так, что углы *ВАМ* и *CDM* прямые.

а) Докажите, что *ВМ* = *СМ*.

б) Найдите угол *ABC*, если угол *BCD* равен 64°, а расстояние от точки *М* до прямой *ВС* равно стороне *AD*.

(Сб.6, 2019)

1. Точка пересечения биссектрис углов при большем основании трапеции лежит на меньшем основании.

а) Докажите, что меньшее основание равно сумме боковых сторон.

б) Найдите углы трапеции, если отношение оснований трапеции равно 3:2, а отношение боковых сторон равно 5:3.

(Сб.12, 2019)

1. В трапеции *ABCD* точка *E* − середина основания *AD*, точка *M* − середина боковой стороны *AB*. Отрезки *CE* и *DM* пересекаются в точке *O*.

а) Докажите, что площади четырёхугольника *AMOE* и треугольника *COD* равны.

б) Найдите, какую часть от площади трапеции составляет площадь четырёхугольника *AMOE*, если *BC* = 3, *AD* = 4.

(***ЕГЭ-2016, основная волна Юг***) Гущин

1. В трапеции *ABCD* точка *E* − середина основания *AD*, точка *M* − середина боковой стороны *AB*.

а) Докажите, что площади четырёхугольника *AMOE* и треугольника *COD* равны, если *O* − точка пересечения отрезков *CE* и *DM*.

б) Найдите, какую часть от площади трапеции составляет площадь четырёхугольника *AMOE*, если *BC* = 2, *AD* = 5.

(Сб.8, 2020)

1. Через точку пересечения *O* диагоналей трапеции проведена прямая, параллельная основанию и пересекающая боковые стороны в точках *M* и *N*.

а) Докажите, что *O* – середина отрезка *MN*.

б) Найдите основания, если известно, что одно из них втрое больше другого, а *MN* = 6.

(Сб.12, 2019)

1. Прямая, параллельная основаниям *BC* и *AD* трапеции *ABCD*, пересекает её боковые стороны *AB* и *CD* в точках *M* и *N* соответственно. Диагонали *AC* и *BD* пересекаются в точке *O*. Прямая *MN* пересекает стороны *OA* и *OD* треугольника *AOD* в точках *K* и *L* соответственно.

а) Докажите, что *MK = NL*.

б) Найдите *MN*, если известно, что *BC* = 3, *AD* = 8 и *MK*: *KL* = 1:3.

(Сб.6, 2019)

1. Прямая, параллельная основаниям *BC* и *AD* трапеции *ABCD*, пересекает её боковые стороны *AB* и *CD* в точках *M* и *N* соответственно, а диагонали *AC* и *BD* − в точках *K* и *L* соответственно, причём точка *K* лежит между *M* и *L*.

а) Докажите, что *MK = NL*.

б) Найдите *MN*, если известно, что *BC* = *a*, *AD* = *b* и *MK*: *KL* : *LN* = 1:2:1.

(Сб.12, 2019)

1. Точка *E−* середина боковой стороны *CD* трапеции *ABCD*. На стороне *AB* взяли точку *K* так, что прямые *CK* и *AE* параллельны. Отрезки *CK* и *BE* пересекаются в точке *O*.

а) Докажите, что *CO* = *KO*.

б) Найдите отношение оснований трапеции *BC* и *AD*, если площадь треугольника *BCK* составляет  площади трапеции *ABCD*.

(***ЕГЭ-2017, основная волна Центр***) Гущин

1. Точка *E* − середина боковой стороны *CD* трапеции *ABCD*. На стороне *AB* взяли точку *K*, так, что прямые *CK* и *AE* параллельны. Отрезки *CK* и *BE* пересекаются в точке *O*.

а) Докажите, что *CO* = *KO*.

б) Найдите отношение оснований трапеции *BC* и *AD*, если площадь треугольника *BCK* составляет  площади трапеции *ABCD*.

(***ЕГЭ-2017, основная волна Центр***) Гущин

1. Точка *E* − середина боковой стороны *CD* трапеции *ABCD*. На стороне *AB* взяли точку *K*, так, что прямые *CK* и *AE* параллельны. Отрезки *CK* и *BE* пересекаются в точке *O*.

а) Докажите, что *CO* = *KO*.

б) Найдите отношение оснований трапеции *BC* и *AD*, если площадь треугольника *BCK* составляет  площади трапеции *ABCD*.

(***ЕГЭ-2017, основная волна Центр***) Гущин

1. Точка *E−* середина боковой стороны *CD* трапеции *ABCD*. На стороне *AB* взяли точку *K* так, что прямые *CK* и *AE* параллельны. Отрезки *CK* и *BE* пересекаются в точке *O*.

а) Докажите, что *CO* = *KO*.

б) Найдите отношение оснований трапеции *BC* и *AD*, если площадь треугольника *BCK* составляет  площади трапеции *ABCD*.

(***ЕГЭ-2017, основная волна Центр***)

1. Точки *L* и *N* *−* середины оснований *BC* и *AD* трапеции *ABCD* соответственно, а точки *K* и *M* – середины диагоналей *AC* и *BD* соответственно. Известно, что *KM* = *LN*.

а) Докажите, что сумма углов при одном из оснований трапеции равна 90°.

б) Найдите высоту трапеции, если площадь четырёхугольника *KLMN* равна 12, а разность оснований трапеции равна10.

(Сб.12, 2019)

1. На основаниях *AD* и *BC* трапеции *ABCD* отмечены точки *M* и *N* соответственно, а на боковых сторонах *AB* и *CD* – точки *K* и *L* соответственно. При этом *DM*: *AM*= *CN*: *BN*= *BK*: *AK*= *CL*: *LD*= 1:2.

а) Докажите, что четырёхугольник *KMLN* – трапеция.

б) Известно, что *AD* = 3*BC*. В каком отношении диагональ *BD* трапеции *ABCD* делит боковые стороны трапеции *KMLN*?

(Сб.12, 2019)

1. Отрезки, соединяющие середины противоположных сторон выпуклого четырёхугольника, равны между собой.

а) Докажите, что середины сторон этого четырёхугольника образуют прямоугольник.

б) Найдите площадь четырёхугольника, если его диагонали равны 8 и 12.

(Сб.7, 2020)

1. Дан четырёхугольник *ABCD*.

а) Докажите, что отрезки *LN* и *KM*, соединяющие середины его противоположных сторон, делят друг друга пополам.

б) Найдите площадь четырёхугольника *ABCD*, если *LM* =, *KM* =, ∠*KML* = 60°.

(*ЕГЭ-2014, Т.Р.*, Сб.10, Сб.12, 2019)

1. Дан четырёхугольник *ABCD*.

а) Докажите, что отрезки *LN* и *KM*, соединяющие середины его противоположных сторон, делят друг друга пополам.

б) Найдите площадь четырёхугольника *ABCD*, если *KL* = 6, *KM* =, ∠*MKL* = 30°.

(*ЕГЭ-2014, Т.Р.*, Сб.10, 2019)

1. Вершины *A* и *D* четырёхугольника *ABCD* соединены с серединой *M* стороны *BC*, а вершины *B* и *C* – с серединой *N* стороны *AD*.

а) Докажите, что если середины отрезков *AM*, *DM*, *BN*, *CN* не лежат на одной прямой, то четырёхугольник с вершинами в этих серединах – параллелограмм.

б) Найдите площадь этого параллелограмма, если известно, что *AD* = 6, *BC* = 8, а угол между прямыми *BC* и *AD* равен 30°.

(Сб.12, 2019)

1. Диагонали *AC* и *BD* четырёхугольника *ABCD* пересекаются в точке *O*. Треугольники *AOB* и *COD* равновелики.

а) Докажите, что *BC* ‖ *AD*.

б) Найдите площади треугольников, на которые диагонали разбивают четырёхугольник *ABCD*, если его площадь равна 27, *BC* = 8, *AD* = 16.

(Сб.12, 2019)

1. На основаниях *AD* и *BC* трапеции *ABCD* построены квадраты *ADEF* и *BCGH*, расположенные вне трапеции.

а) Докажите, что прямая *FG* проходит через точку пересечения диагоналей трапеции.

б) Прямая, проходящая через центры квадратов, пересекает основание *BC* в точке *M*. Найдите *BM*, если известно, что *BC* = 20, *AC* ⊥ *BD* и *BD* : *AC* = 3:2.

(Сб.12, 2019)

***3. Треугольник и четырёхугольник***

1. Вершины *K* и *L* квадрата *KLMN* с центром *O* лежат на стороне *AB* треугольника *ABC*, а вершины *M* и *N* – на сторонах *BC* и *AC* соответственно. Высота *CH* треугольника *ABC* проходит через точку *O* и пересекает отрезок *MN* в точке *D*, причём *CD = DO = OH*.

а) Докажите, что треугольник *ABC* равнобедренный и прямоугольный.

б) Пусть прямая *AD* пересекает сторону *BC* в точке *Q*. Найдите *AQ*, если сторона квадрата *KL* = 1.

(Сб.2, Сб.3, Сб.4, 2020)

1. Вершины *K* и *L* квадрата *KLMN* с центром *O* лежат на стороне *AB* треугольника *ABC*, а вершины *M* и *N* – на сторонах *BC* и *AC* соответственно. Высота *CH* треугольника *ABC* проходит через точку *O* и пересекает отрезок *MN* в точке *D*, причём *CD = DO = OH*.

а) Докажите, что треугольник *ABC* равнобедренный и прямоугольный.

б) Пусть прямая *AD* пересекает сторону *BC* в точке *Q*. Найдите *AQ*, если сторона квадрата *KL* = 2.

(Сб.1, Сб.3, Сб.4, 2020)

1. На гипотенузе *KL* равнобедренного прямоугольного треугольника *KLM* вне треугольника построен квадрат *KLPQ*. Прямая *MP* пересекает гипотенузу *KL* в точке *N*.

а) Докажите, что *KL*: *NL* = 2:1.

б) Прямая, проходящая через точку *N* перпендикулярно *MP*, пересекает отрезок *KQ* в точке *R*. Найдите *KR*, если *KQ* = 1.

(*ЕГЭ-2015, П.Р. ФЦТ ФИПИ*)

1. На гипотенузе *KL* равнобедренного прямоугольного треугольника *KLM* вне треугольника построен квадрат *KLPQ*. Прямая *PQ* пересекает гипотенузу *KL* в точке *N*.

а) Докажите, что *KN*: *NL* = 1:2.

б) Прямая, проходящая через точку *N* перпендикулярно *PQ*, пересекает отрезок *KQ* в точке *R*. Найдите *KR*, если *KQ* = 9.

(Сб.9, 2019)

1. На гипотенузе *AB* и катетах *BC* и *AC* прямоугольного треугольника *ABC* отмечены точки *M*, *N* и *K* соответственно, причем прямая *KN* параллельна прямой *AB* и *BM* = *BN* =*KN*.  Точка *P* − середина отрезка *KN*.

а) Докажите, что четырехугольник *BCPM* − равнобедренная трапеция.

б) Найдите площадь треугольника *ABC*, если *BM* = 1 и ∠*BCM* = 15°.

(Сб.6, 2019)

1. На гипотенузе *AB* и катетах *BC* и *AC* прямоугольного треугольника *ABC* отмечены точки *M*, *N* и *K* соответственно, причем прямая *KN* параллельна прямой *AB* и *BM* = *BN* =*KN*.  Точка *P* − середина отрезка *KN*.

а) Докажите, что четырехугольник *BCPM* − равнобедренная трапеция.

б) Найдите площадь треугольника *ABC*, если *BM* = 2 и ∠*BCM* = 30°.

(Сб.6, 2019)

1. На гипотенузе *AB* и катетах *BC* и *AC* прямоугольного треугольника *ABC* отмечены точки *M*, *N* и *K* соответственно, причем прямая *KN* параллельна прямой *AB* и *BM* = *BN* =*KN*.  Точка *P* − середина отрезка *KN*.

а) Докажите, что четырехугольник *BCPM* − равнобедренная трапеция.

б) Найдите площадь треугольника *ABC*, если *BM* = 2 и ∠*BCM* = 22,5°.

(Сб.6, 2019)

1. Точка *E* расположена вне квадрата *ABCD* с центром *O*, причём треугольник *BEC* прямоугольный (∠*E* = 90°) и неравнобедренный. Точка *M −* середина стороны *BC*.

а) Докажите, что треугольник *OME* равнобедренный.

б) Прямая *EO* пересекает сторону *AD* квадрата в точке *K*. Найдите отношение *AK*: *KD*, если известно, что ∠*CBE* = 30°.

(Сб.12, 2019)

1. Точка *A* расположена вне квадрата *KLMN* с центром *O*, причём треугольник *KAN* прямоугольный (∠*A* = 90°) и *AK* = 2*AN*. Точка *B −* середина стороны *KN* .

а) Докажите, что прямая *BM* параллельна прямой *AN*.

б) Прямая *AO* пересекает сторону *ML* квадрата в точке *P*. Найдите отношение *LP*: *PM*.

(*ЕГЭ-2016, Т.Р. 10кл.*)

1. Точка *A* расположена вне квадрата *KLMN* с центром *O*, причём треугольник *KAN* прямоугольный (∠*A* = 90°) и *AK* = 3*AN*. Точка *B* лежит на стороне *KN* и *KB*: *BN* = 2:1.

а) Докажите, что прямая *BM* параллельна прямой *AN*.

б) Прямая *AO* пересекает сторону *ML* квадрата в точке *P*. Найдите отношение *LP*: *PM*.

(*ЕГЭ-2016, Т.Р. 10кл.*)

1. На катетах *AC* и *BC* прямоугольного треугольника *ABC* вне треугольника построены квадраты *ACDE* и *BFKC*. Точка *M* – середина гипотенузы *AB*, *H* – точка пересечения прямых *CM* и *DK*.

а) Докажите, что прямые *CM* и *DK* перпендикулярны.

б) Найдите *MH*, если известно, что катеты треугольника *ABC* равны 30 и 40.

(Сб.2, Сб.4, Сб.8, 2020, Сб.12, 2019)

1. На катетах *AC* и *BC* прямоугольного треугольника *ABC* вне треугольника построены квадраты *ACDE* и *BFKC*. Точка *M* – середина гипотенузы *AB*, *H* – точка пересечения прямых *CM* и *DK*.

а) Докажите, что прямые *CM* и *DK* перпендикулярны.

б) Найдите *MH*, если известно, что катеты треугольника *ABC* равны 60 и 80.

(Сб.2, Сб.3, Сб.4, 2020)

1. Вне прямоугольного треугольника *ABC* на его катетах построены квадраты *ACDE* и *BCFG*. Продолжение медианы *CM* треугольника *ABC* пересекает прямую *DF* в точке *N*.

а) Докажите, что *CN* является высотой треугольника *CDF*.

б) Найдите отрезок *CN*, если *AC* = 1, *BC* = 4.

(Сб.7, 2020)

1. В равнобедренном треугольнике *ABC* с углом 120° при вершине *A* проведена биссектриса *BD*. В треугольник *ABC* вписан прямоугольник *DEFH* так, что сторона *FH* лежит на отрезке *BC*, а вершина *E* – на отрезке *AB*.

а) Докажите, что *FH* = 2*DH*.

б) Найдите площадь прямоугольника *DEFH*, если *АВ* = 4.

(***ЕГЭ-2014, резервный день досрочной волны***, Сб.12, 2019) Гущин

1. В равнобедренном треугольнике *ABC* с углом 120° при вершине *A* проведена биссектриса *BD*. В треугольник *ABC* вписан прямоугольник *DEFH* так, что сторона *FH* лежит на отрезке *BC*, а вершина *E* – на отрезке *AB*.

а) Докажите, что *FH* = 2*DH*.

б) Найдите площадь прямоугольника *DEFH*, если *АВ* = 2.

(***ЕГЭ-2014, резервный день досрочной волны***) Гущин

1. Две стороны треугольника равны 6 и 12, косинус угла между ними равен . В треугольнике вписан ромб, имеющий с треугольником общий угол, заключённый между данными сторонами (вершина ромба, противоположная вершине этого угла, лежит на третьей стороне треугольника).

а) Докажите, что данный треугольник равнобедренный.

б) Найдите сторону ромба.

(Сб.12, 2019)

1. На сторонах *AB*, *BC* и *AC* треугольника *ABC* отмечены точки *C*1, *A*1 и *B*1 соответственно, причём *AC*1 : *C*1*B* = 21:10, *BA*1 : *A*1*C* = 2:3, *AB*1 : *B*1*C* = 2:5. Отрезки *BB*1 и *CC*1 пересекаются в точке *D*.

а) Докажите, что четырёхугольник *ADA*1*B*1 − параллелограмм.

б) Найдите *CD*, если отрезки *AD* и *BC* перпендикулярны, *AC* = 63, *BC* = 25.

(***ЕГЭ-2020, основная волна***)

1. На сторонах *AB*, *BC* и *AC* треугольника *ABC* отмечены точки *C*1, *A*1 и *B*1 соответственно, причём *AC*1 : *C*1*B* = 8:3, *BA*1 : *A*1*C* = 1:2, *CB*1 : *B*1*A* = 3:1. Отрезки *BB*1 и *CC*1 пересекаются в точке *D*.

а) Докажите, что четырёхугольник *ADA*1*B*1 − параллелограмм.

б) Найдите *CD*, если отрезки *AD* и *BC* перпендикулярны, *AC* = 28, *BC* = 18.

(***ЕГЭ-2020, основная волна***) Гущин

1. На сторонах *АС* и *ВС* треугольника *AВС* вне его построены квадраты *ACDE* и *CBFG*. Точка *М −* середина стороны *АВ*.

а) Докажите, что точка *M* равноудалена от центров квадратов.

б) Найдите площадь треугольника *DMG*, если *АС* = 6, *BC* = 8, *АВ* = 10.

(*ЕГЭ-2019, Д.Р.*)

1. На сторонах *АС* и *ВС* треугольника *AВС* вне его построены квадраты *ACDE* и *CBFG*. Точка *М −* середина стороны *АВ*.

а) Докажите, что точка *M* равноудалена от центров квадратов.

б) Найдите площадь треугольника *DMG*, если *АС* = 30, *BC* = 40, *АВ* = 50.

(*ЕГЭ-2019, Д.Р.*)

1. На сторонах *AC* и *BC* треугольника *ABC* вне треугольника построены квадраты *ACDE* и *BFKC*. Точка *M* – середина стороны *AB*.

а) Докажите, что *CM* =*DK*.

б) Найдите расстояние от точки *M* до центров квадратов, если *AC* = 6, *BC* = 10 и ∠*ACB* = 30°.

(Сб.3, Сб.4, 2020, Сб.12, 2019)

1. На сторонах *AC* и *BC* треугольника *ABC* вне треугольника построены квадраты *ACDE* и *BFKC*. Точка *M* – середина стороны *AB*.

а) Докажите, что *CM* =*DK*.

б) Найдите расстояние от точки *M* до центров квадратов, если *AC* = 10, *BC* = 32 и ∠*ACB* = 30°.

(Сб.1, Сб.2, Сб.3, Сб.4, 2020)

1. На сторонах *AC* и *BC* треугольника *ABC* вне треугольника построены квадраты *ACDE* и *BFKC*. Точка *M* – середина стороны *AB*.

а) Докажите, что *CM* =*DK*.

б) Найдите расстояние от точки *M* до центров квадратов, если *AC* = 14, *BC* = 16 и ∠*ACB* = 150°.

(Сб.2, Сб.3, Сб.4, 2020)

1. В параллелограмме *ABCD* известно, что *AB* = 2, *BC* = 3, ∠*A* = 60°. На сторонах *AB* и *BC* как на основаниях построены вне параллелограмма равнобедренные треугольники с углами 120° при вершинах.

а) Докажите, прямая, соединяющая вершины этих треугольников, проходит через точку *B*.

б) Найдите расстояние между этими вершинами.

(Сб.9, 2019)

1. Точка *M* лежит на стороне *BC* выпуклого четырёхугольника *ABCD*, причём *B* и *C* − вершины равнобедренных треугольников с основаниями *AM* и *DM* соответственно, а прямые *AM* и *MD* перпендикулярны.

а) Докажите, что биссектрисы углов при вершинах *B* и *C* четырёхугольника *ABCD* пересекаются на стороне *AD*.

б) Пусть *N* − точка пересечения этих биссектрис. Найдите площадь четырёхугольника *ABCD*, если известно, что *BM*: *MC* = 3:4, а площадь четырёхугольника, стороны которого лежат на прямых *AM*, *DM*, *BN* и *CN*, равна 24.

(***ЕГЭ-2015, резервный день основной волны***)

1. Точка *M* лежит на стороне *BC* выпуклого четырёхугольника *ABCD*, причём *B* и *C* − вершины равнобедренных треугольников с основаниями *AM* и *DM* соответственно, а прямые *AM* и *MD* перпендикулярны.

а) Докажите, что биссектрисы углов при вершинах *B* и *C* четырёхугольника *ABCD* пересекаются на стороне *AD*.

б) Пусть *N* − точка пересечения этих биссектрис. Найдите площадь четырёхугольника *ABCD*, если известно, что *BM*: *MC* = 1:3, а площадь четырёхугольника, стороны которого лежат на прямых *AM*, *DM*, *BN* и *CN*, равна 18.

(***ЕГЭ-2015, резервный день основной волны,*** Сб.9, 2019, Сб.11, 2016)

***4. Окружность***

1. Хорды *AD*, *BE* и *CF* окружности делят друг друга на три равные части.

а) Докажите, что эти хорды равны.

б) Найдите площадь шестиугольника *ABCDEF*, если точки *A*, *B*, *C*, *D*, *E* последовательно расположены на окружности, а радиус окружности равен .

(*ЕГЭ-2015, Д.Р.*)

1. Хорды *AD*, *BE* и *CF* окружности делят друг друга на три равные части.

а) Докажите, что эти хорды равны.

б) Найдите площадь шестиугольника *ABCDEF*, если точки *A*, *B*, *C*, *D*, *E* последовательно расположены на окружности, а радиус окружности равен .

(*ЕГЭ-2015, Д.Р.*, Сб.12, 2019)

1. Дана окружность с центром в точке *O* и радиусом 5. Точка *K* делит диаметр *AD* в отношении 1:4, считая от точки *D*. Через точку *K* проведена хорда *BC* перпендикулярно диаметру *AD*. На меньшей дуге *AB* окружности взята точка *M*.

а) Докажите, что *BM* ⋅ *CM* < *BA*2.

б) Найдите площадь четырёхугольника *ACBM*, если дополнительно известно, что площадь треугольника *BCM* равна 24.

(*ЕГЭ-2015, Д.Р. 10кл.*)

1. Дана окружность с центром в точке *O* и радиусом 5. Точка *K* делит диаметр *AD* в отношении 1:9, считая от точки *D*. Через точку *K* проведена хорда *BC* перпендикулярно диаметру *AD*. На меньшей дуге *AB* окружности взята точка *M*.

а) Докажите, что *BM* ⋅ *CM* < *BA*2.

б) Найдите площадь четырёхугольника *ACBM*, если дополнительно известно, что площадь треугольника *BCM* равна 24.

(*ЕГЭ-2015, Д.Р. 10кл.*)

1. Из одной точки проведены к окружности две касательные. Длина одной из касательных равна 12.

а) Докажите, что длина второй касательной также равна 12.

б) Расстояние между точками касания равно 14,4. Найдите радиус окружности.

(Сб.7, 2020)

1. Окружность касается сторон угла с вершиной *O* в точках *A* и *B*. На этой окружности внутри треугольника *AOB* взята точка *C*. Расстояния от точки *C* до прямых *AO* и *BO* равны соответственно 8 и 18.

а) Докажите, что углы *ABC* и *CAO* равны.

б) Найдите расстояние от точки *C* до прямой *AB*.

(Сб.7, 2020)

1. К окружности с диаметром *AB* проведена касательная *BC* так, что *BC* =. Прямая *AC* вторично пересекает окружность в точке *D*. Точка *E* диаметрально противоположна точке *D*. Прямые *ED* и *BC* пересекаются в точке *F*.

а) Докажите, что *BD*2 = *CD* ⋅ *BE*.

б) Найдите площадь треугольника *FBE*.

(***ЕГЭ-2020, резервный день основной волны***) Гущин

1. Окружность с центром *O* касается двух параллельных прямых. Проведена касательная к окружности, пересекающая эти прямые в точках *A* и *B*.

а) Докажите, что угол *AOB −* прямой.

б) Найдите радиус окружности, если *AO* = 15, *BO* = 20.

(Сб.7, 2020)

1. Общие внутренние касательные к двум окружностям перпендикулярны. Одна из них касается окружностей в точках *A* и *C*, вторая – в точках *B* и *D* (точки *A* и *B* лежат на одной окружности).

а) Докажите, что отрезок *AC* равен сумме радиусов окружностей.

б) Найдите площадь четырёхугольника *ABCD*, если известно, что *AB* = 6, *CD* = 8.

(Сб.8, 2020, Сб.12, 2019)

1. К двум непересекающимся окружностям равных радиусов проведены две параллельные общие касательные. Окружности касаются одной из этих прямых в точках *A* и *B*. Через точку *C*, лежащую на отрезке *AB*, проведены касательные к этим окружностям, пересекающие вторую прямую в точках *D* и *E*, причем отрезки *CA* и *CD* касаются одной окружности, а отрезки *CB* и *CE* – другой.

а) Докажите, что периметр треугольника *CDE* вдвое больше расстояния между центрами окружностей.

б) Найдите *DE*, если радиусы окружностей равны 5, расстояние между их центрами равно 18, а *AC* = 8.

(***ЕГЭ-2014, вторая волна***)

***5. Касающиеся и пересекающиеся окружности***

1. Окружности с центрами *O*1 и *O*2 касаются внешним образом; прямая касается первой окружности в точке *A*, а второй − в точке *B*. Известно, что точка *M* пересечения диагоналей четырёхугольника *O*1*ABO*2 лежит на первой окружности.

а) Докажите, что треугольник *MBO*2 равнобедренный.

б) Найдите отношение радиусов окружностей.

(Сб.12, 2019)

1. Две окружности касаются внешним образом в точке *C*. Прямая касается меньшей окружности в точке *A*, а большей − в точке *B*, отличной от *A*. Прямая *AC* вторично пересекает бóльшую окружность в точке *D*, прямая *BC* вторично пересекает меньшую окружность в точке *E*.

а) Докажите, что прямая *AE* параллельна прямой *BD*.

б) Пусть *L −* отличная от *D* точка пересечения отрезка *DE* с большей окружностью. Найдите *EL*, если радиусы окружностей равны 2 и 5.

(*ЕГЭ-2019, Т.Р.*)

1. Окружности с центрами *O*1 и *O*2 касаются в точке *A* внешним образом. Прямая, проходящая через точку *A*, вторично пересекает первую окружность в точке *B*, а вторую – в точке *C*.

а) Докажите, что *O*2*C*‖*O*1*B*.

б) Найдите площадь треугольника *BCO*2, если известно, что радиусы первой и второй окружностей равны 5 и 8 соответственно, а ∠*ABO*1 = 15°.

(Сб.8, 2020, Сб.12, 2019)

1. Две окружности касаются внешним образом в точке *K*. Прямая *AB* касается первой окружности в точке *A*, а второй – в точке *B*. Прямая *BK* пересекает первую окружность в точке *D*, прямая *AK* пересекает вторую окружность в точке *C*.

а) Докажите, что прямые *AD* и *BC* параллельны.

б) Найдите площадь треугольника *AKB*, если известно, что радиусы окружностей равны 4 и 1.

(***ЕГЭ-2021, 2020, 2019, 2018, 2017, 2016, 2015, 2014, Демо***, Сб.11, 2020)

1. Две окружности касаются внешним образом в точке *K*. Прямая *AB* касается первой окружности в точке *A*, а второй – в точке *B*. Прямая *BK* пересекает первую окружность в точке *D*, прямая *AK* пересекает вторую окружность в точке *C*.

а) Докажите, что прямые *AD* и *BC* параллельны.

б) Найдите площадь треугольника *DKC*, если известно, что радиусы окружностей равны 4 и 9.

(Сб.5, 2018)

1. Две окружности разных радиусов касаются внешним образом в точке *K*. Прямая *AB* касается первой окружности в точке *A*, а второй – в точке *B*. Луч *BK* пересекает первую окружность в точке *D*, луч *AK* пересекает вторую окружность в точке *C*.

а) Докажите, что четырёхугольник *ABCD* − трапеция.

б) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника *BCD*, если радиус первой окружности равен 1, а радиус второй окружности равен 4.

(***ЕГЭ-2019, резервный день досрочной волны***)

1. Две окружности касаются внешним образом в точке *K*. Прямая *AB* касается первой окружности в точке *A*, а второй – в точке *B*. Прямая *BK* пересекает первую окружность в точке *D*, прямая *AK* пересекает вторую окружность в точке *C*.

а) Докажите, что прямые *AD* и *BC* параллельны.

б) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника *BCD*, если радиус первой окружности равен 4, а радиус второй окружности равен 1.

(***ЕГЭ-2019, резервный день досрочной волны***) Гущин

1. Две окружности касаются внешним образом в точке *C*. Прямая касается меньшей окружности в точке *A*, а большей − в точке *B*, отличной от *A*. Прямая *AC* вторично пересекает бóльшую окружность в точке *D*, прямая *BC* вторично пересекает меньшую окружность в точке *E*.

а) Докажите, что прямая *AE* параллельна прямой *BD*.

б) Пусть *L −* отличная от *D* точка пересечения отрезка *DE* с большей окружностью. Найдите *EL*, если радиусы окружностей равны 1 и 3.

(*ЕГЭ-2019, Т.Р.*)

1. Окружности с центрами *O*1 и *O*2 касаются внешним образом в точке *C*. К окружностям проведены общая внешняя касательная и общая внутренняя касательная. Эти касательные пересекаются в точке *D*.

а) Докажите, что треугольник *O*1*DO*2 прямоугольный.

б) Найдите радиусы окружностей, если известно, что *DO*1 = и *DO*2 =.

(Сб.8, 2020, Сб.12, 2019)

1. Две касающиеся внешним образом в точке *K* окружности, радиус одной из которых вдвое больше радиуса другой, вписаны в угол с вершиной *A*. Общая касательная к этим окружностям, проходящая через точку *K*, пересекает стороны угла в точках *B* и *C*.

а) Докажите, что *AB* = *AC*.

б) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника *ABC*, если *AB* =.

(Сб.7, 2020)

1. В прямоугольном треугольнике *ABC* с прямым углом *C* известны стороны *AC* = 15, *BC* = 8. Окружность радиуса 2,5 с центром на стороне *BC* проходит через вершину *C*. Вторая окружность с центром *O* касается катета *AC*, гипотенузы треугольника, а также внешним образом касается первой окружности.

а) Докажите, что прямая *AO* пересекает первую окружность.

б) Найдите радиус второй окружности.

(Сб.12, 2019)

1. В прямоугольном треугольнике *ABC* с прямым углом *C* известны стороны *AC* = 12, *BC* = 5. Окружность радиуса 0,5 с центром *O* на стороне *BC* проходит через вершину *C*. Вторая окружность касается катета *AC*, гипотенузы треугольника, а также внешним образом касается первой окружности.

а) Докажите, что радиус второй окружности меньше, чем  длины катета *AC*.

б) Найдите радиус второй окружности.

(*ЕГЭ-2018, Т.Р. 10кл.*, *ЕГЭ-2015, Д.Р. 10-11кл.*)

1. В прямоугольном треугольнике *ABC* с прямым углом *C* известны стороны *AC* = 15, *BC* = 8. Окружность радиуса 2,5 с центром *O* на стороне *BC* проходит через вершину *C*. Вторая окружность касается катета *AC*, гипотенузы треугольника, а также внешним образом касается первой окружности.

а) Докажите, что радиус второй окружности меньше, чем  длины катета *AC*.

б) Найдите радиус второй окружности.

(*ЕГЭ-2018, Т.Р. 10кл.*, *ЕГЭ-2015, Д.Р. 10-11кл.*)

1. В параллелограмме лежат две окружности, касающиеся друг друга и трёх сторон параллелограмма каждая.

а) Докажите, что одна из сторон параллелограмма видна из центра одной из окружностей под прямым углом.

б) Найдите площадь параллелограмма, если радиус одной из окружностей равен 2, а один из отрезков стороны параллелограмма от вершины до точки касания с одной из окружностей равен 4.

(Сб.12, 2019)

1. В прямоугольной трапеции *ABCD* с прямым углом при вершине *A* расположены две окружности. Одна из них касается боковых сторон и большего основания *AD*, вторая − боковых сторон, меньшего основания *BC* и первой окружности.

а) Прямая, проходящая через центры окружностей, пересекает основание *AD* в точке *P*. Докажите, что .

б) Найдите площадь трапеции, если радиусы окружностей равны 3 и 1.

(***ЕГЭ-2015, основная волна***)

1. В прямоугольной трапеции *ABCD* с прямым углом при вершине *A* расположены две окружности. Одна из них касается боковых сторон и большего основания *AD*, вторая − боковых сторон, меньшего основания *BC* и первой окружности.

а) Прямая, проходящая через центры окружностей, пересекает основание *AD* в точке *P*. Докажите, что .

б) Найдите площадь трапеции, если радиусы окружностей равны  и .

(Сб.8, 2020, Сб.6, Сб.9, 2019)

1. В равнобедренной трапеции *ABCD* с основаниями *AD* и *BC* расположены две окружности, каждая из которых касается другой окружности, двух боковых сторон и одного из оснований. Пусти *P* и *Q* – точки касания окружностей с боковой стороной *AB*, а общая касательная окружностей, проходящая через их точку касания, пересекает боковые стороны в точках *M* и *N*.

а) Докажите, что *MN* = *PQ*.

б) Найдите площадь трапеции *ABCD*, если *AD* = 18 и *BC* = 2.

(Сб.12, 2019)

1. Точка *B* лежит на отрезке *AC*. Прямая, проходящая через точку *A*, касается окружности с диаметром *BC* в точке *M* и второй раз пересекает окружность с диаметром *AB* в точке *K*. Продолжение отрезка *MB* пересекает окружность с диаметром *AB* в точке *D*.

а) Докажите, что прямые *AD* и *MC* параллельны.

б) Найдите площадь треугольника *DBC*, если *AK* = 3 и *MK* = 12.

(Сб.6, Сб.9, 2019, Сб.11, 2017)

1. Точка *B* лежит на отрезке *AC*. Прямая, проходящая через точку *A*, касается окружности с диаметром *BC* в точке *M* и второй раз пересекает окружность с диаметром *AB* в точке *K*. Продолжение отрезка *MB* пересекает окружность с диаметром *AB* в точке *D*.

а) Докажите, что прямые *AD* и *MC* параллельны.

б) Найдите площадь треугольника *DBC*, если *AK =* 3 и *MK* = 14.

(Сб.11, 2017)

1. Точка *B* лежит на отрезке *AC*. Прямая, проходящая через точку *A*, касается окружности с диаметром *BC* в точке *M* и второй раз пересекает окружность с диаметром *AB* в точке *K*. Продолжение отрезка *MB* пересекает окружность с диаметром *AB* в точке *D*.

а) Докажите, что прямые *AD* и *MC* параллельны.

б) Найдите площадь треугольника *DBC*, если *AK* = 4 и *MK* = 12.

(Сб.11, 2017)

1. Из вершины *C* прямого угла прямоугольного треугольника *ABC* проведена высота *CH*.

а) Докажите, что отношение площадей кругов, построенных на отрезках *AH* и *BH* соответственно как на диаметрах, равно .

б) Пусть точка *O*1 − центр окружности диаметра *AH*, вторично пересекающей отрезок *AC* в точке *P*, а точка *O*2 − центр окружности диаметра *BH*, вторично пересекающей отрезок *BC* в точке *Q*. Найдите площадь четырёхугольника *PO*1*O*2*Q*, если *АС* = 12, *BC* = 10.

(***ЕГЭ-2019, резервный день основной волны***)

1. Из вершины *C* прямого угла прямоугольного треугольника *ABC* проведена высота *CH*.

а) Докажите, что отношение площадей кругов, построенных на отрезках *AH* и *BH* соответственно как на диаметрах, равно .

б) Пусть точка *O*1 − центр окружности диаметра *AH*, вторично пересекающей отрезок *AC* в точке *P*, а точка *O*2 − центр окружности диаметра *BH*, вторично пересекающей отрезок *BC* в точке *Q*. Найдите площадь четырёхугольника *PO*1*O*2*Q*, если *АС* = 22, *BC* = 18.

(***ЕГЭ-2019, резервный день основной волны***) Гущин

1. Окружности радиусов 8 и 3 касаются внутренним образом. Из центра большей окружности проведена касательная к меньшей окружности.

а) Докажите, что расстояние от точки касания до центра большей окружности равно 4.

б) Найдите расстояние от этой точки касания до точки касания окружностей.

(Сб.7, 2020)

1. Окружность с центром *O* и окружность вдвое меньшего радиуса касаются внутренним образом в точке *A*. Хорда *AB* большей окружности пересекает меньшую окружность в точке в точке *M*.

а) Докажите, что *M* − середина *AB*.

б) Луч *OM* пересекает бóльшую окружность в точке *P*. Найдите расстояние от центра большей окружности до хорды *AP*, если радиус большей окружности равен 13, а *OM* = 5.

(Сб.8, 2020, Сб.12, 2019)

1. Две окружности касаются внутренним образом в точке *A*, причём меньшая проходит через центр большей. Хорда *BC* большей окружности касается меньшей в точке *P*. Хорды *AB* и *AC* пересекают меньшую окружность в точках *K* и *M* соответственно.

а) Докажите, что прямые *KM* и *BC* параллельны.

б) Пусть *L* − точка пересечения отрезков *KM* и *AP*. Найдите *AL*, если радиус большей окружности равен 26, а *BC* = 48.

(***ЕГЭ-2015, основная волна***)

1. Две окружности касаются внутренним образом в точке *A*, причём меньшая проходит через центр большей. Хорда *BC* большей окружности касается меньшей в точке *P*. Хорды *AB* и *AC* пересекают меньшую окружность в точках *K* и *M* соответственно.

а) Докажите, что прямые *KM* и *BC* параллельны.

б) Пусть *L* − точка пересечения отрезков *KM* и *AP*. Найдите *AL*, если радиус большей окружности равен 10, а *BC* = 16.

(***ЕГЭ-2015, основная волна***, Сб.6, Сб.9, 2019) Гущин

1. Две окружности касаются внутренним образом в точке *K*, причём меньшая проходит через центр большей. Хорда *MN* большей окружности касается меньшей в точке *C*. Хорды *KM* и *KN* пересекают меньшую окружность в точках *A* и *B* соответственно, а отрезки *KC* и *AB* пересекаются в точке *L*.

а) Докажите, что *CN*: *CM* = *LB* : *LA*.

б) Найдите *MN*, если *LB* : *LA =* 2:3, а радиус малой окружности равен.

(Сб.6, Сб.9, 2019, Сб.11, 2016)

1. Две окружности касаются внутренним образом в точке *A*, причём меньшая окружность проходит через центр *O* большей. Диаметр *BC* большей окружности вторично пересекает меньшую окружность в точке *M*, отличной от *A*. Лучи *AO* и *AM* вторично пересекают большую окружность в точках *P* и *Q* соответственно. Точка *C* лежит на дуге *AQ* большей окружности, не содержащей точку *P*.

а) Докажите, что прямые *PQ* и *BC* параллельны.

б) Известно, что sin∠*AOC* =. Прямые *PC* и *AQ* пересекаются в точке *K*. Найдите отношение *QK*: *KA*.

(***ЕГЭ-2017, основная волна Центр***) Гущин

1. Две окружности касаются внутренним образом в точке *С*. Вершины *А* и *В* равнобедренного треугольника *АВС* с прямым углом *С* лежат на большей и меньшей окружностях соответственно. Прямая *АС* вторично пересекает меньшую окружность в точке *D*. Прямая *ВС* вторично пересекает большую окружность в точке *Е*.

а) Докажите, что *AЕ* параллельна *BD*.

б) Найдите *AC*, если радиусы окружностей равны 8 и 15.

(***ЕГЭ-2020, основная волна Центр***) Гущин

1. На диаметре *AB* окружности с центром *O* взята точка *O*1. Построена вторая окружность с центром в точке *O*1 радиусом *O*1*B*. Луч с началом в точке *A* касается второй окружности в точке *C* и пересекает первую окружность в точке *D*.

а) Докажите, что прямые *O*1*C* и *BD* параллельны.

б) Прямая *O*1*C* пересекает окружность с диаметром *AB* в точках *P* и *Q* (точка *P* лежит на дуге *ADB*). Найдите площадь четырёхугольника *PDBQ*,если окружности касаются внутренним образом в точке *B*, а их радиусыравны 40 и 30 соответственно.

(*ЕГЭ-2020, Т.Р.*)

1. На диаметре *AB* окружности с центром *O* взята точка *O*1. Построена вторая окружность с центром в точке *O*1 радиусом *O*1*B*. Луч с началом в точке *A* касается второй окружности в точке *C* и пересекает первую окружность в точке *D*.

а) Докажите, что прямые *O*1*C* и *BD* параллельны.

б) Прямая *O*1*C* пересекает окружность с диаметром *AB* в точках *P* и *Q* (точка *P* лежит на дуге *ADB*). Найдите площадь четырёхугольника *PDBQ*,если окружности касаются внутренним образом в точке *B*, а их радиусыравны 20 и 15 соответственно.

(*ЕГЭ-2020, Т.Р.*)

1. Две равные окружности с центрами *O*1 и *O*2 пересекаются в точках *M* и *N*. Лучи *O*1*M* и *O*1*N* вторично пересекают окружность с центром *O*2 в точках *A* и *B* соответственно, причём *M* – середина *O*1*A*.

а) Докажите, что точки *A*, *B* и *O*2 лежат на одной окружности.

б) Окружности пересекают отрезок *O*1*O*2 в точках *C* и *D*. Найдите отношение отрезка *CD* к радиусу окружностей.

(Сб.12, 2019)

1. Окружности с центрами *O*1 и *O*2 разных радиусов пересекаются в точках *A* и *B*. Хорда *AC* большей окружности пересекает меньшую окружность в точке *M* и делится этой точкой пополам.

а) Докажите, что проекция отрезка *O*1*O*2 на прямую *AC* в четыре раза меньше *AC*.

б) Найдите *O*1*O*2, если радиусы окружностей равны 5 и 17, а *AC* = 16.

(Сб.12, 2019)

1. Окружности с центрами *O*1 и *O*2 разных радиусов пересекаются в точках *A* и *B*. Хорда *AC* большей окружности пересекает меньшую окружность в точке *M* и делится этой точкой пополам.

а) Докажите, что проекция отрезка *O*1*O*2 на прямую *AC* в четыре раза меньше *AC*.

б) Найдите *O*1*O*2, если радиусы окружностей равны 10 и 15, а *AC* = 24.

(Сб.5, 2018)

1. Отрезок *AB* – диаметр окружности с центром *O*. Вторая окружность с центром в точке *B* пересекается с первой окружностью в точках *C* и *D*. Касательная, проведённая в точке *C* к первой окружности, вторично пересекает вторую окружность в точке *P*.

а) Докажите, что треугольники *AOC* и *CBP* подобны.

б) Найдите *AP*, если известно, что *BC* = 15 и *PC* = 24.

(Сб.12, 2019)

1. Две окружности с центрами *O*1 и *O*2 и радиусами 3 и 4 пересекаются в точках *A* и *B*, причём точки *O*1 и *O*2 лежат по разные стороны от прямой *AB*. Через точку *A* проведена прямая, вторично пересекающая эти окружности в точках *M* и *K*, причем точка *A* лежит между точками *M* и *K*.

а) Докажите, что треугольники *MBK* и *O*1*AO*2 подобны.

б) Найдите расстояние от точки *B* до прямой *MK*, если *MK* = 7, *O*1*O*2 = 5.

(***ЕГЭ-2017, основная волна***)

1. Две окружности с центрами *O*1 и *O*2 пересекаются в точках *A* и *B*, причем точки *O*1 и *O*2 лежат по разные стороны от прямой *AB*. Продолжение диаметра *CA* первой окружности и хорды *CB* этой же окружности пересекают вторую окружность в точках *D* и *E* соответственно.

а) Докажите, что треугольники *CBD* и *O*1*AO*2 подобны.

б) Найдите *AD*, если ∠*DAE* = ∠*BAC*, а радиус второй окружности втрое больше радиуса первой и *AB*= 3.

(***ЕГЭ-2017, основная волна Центр***) Гущин

1. Две окружности с центрами *O*1 и *O*2 пересекаются в точках *A* и *B*, причем точки *O*1 и *O*2 лежат по разные стороны от прямой *AB*. Продолжение диаметра *CA* первой окружности и хорды *CB* этой же окружности пересекают вторую окружность в точках *D* и *E* соответственно.

а) Докажите, что треугольники *CBD* и *O*1*AO*2 подобны.

б) Найдите *AD*, если ∠*DAE* = ∠*BAC*, а радиус второй окружности в четыре раза больше радиуса первой и *AB*= 2.

(***ЕГЭ-2017, основная волна Центр***) Гущин

1. Две окружности пересекаются в точках *P* и *Q*. Прямая, проходящая через точку *P*, второй раз пересекает первую окружность в точке *A*, а вторую – в точке *D*. Прямая, проходящая через точку *Q* параллельно *AD*, второй раз пересекает первую окружность в точке *B*, а вторую – в точке *C*.

а) Докажите, что четырёхугольник *ABCD* – параллелограмм.

б) Найдите отношение *BP*: *PC*, если радиус первой окружности вдвое больше радиуса второй.

(*ЕГЭ-2014, Д.Р*., Сб.3, Сб.4, Сб.8, 2020, Сб.12, 2019)

1. Две окружности пересекаются в точках *P* и *Q*. Прямая, проходящая через точку *P*, второй раз пересекает первую окружность в точке *A*, а вторую – в точке *D*. Прямая, проходящая через точку *Q* параллельно *AD*, второй раз пересекает первую окружность в точке *B*, а вторую – в точке *C*.

а) Докажите, что четырёхугольник *ABCD* – параллелограмм.

б) Найдите отношение *BP*: *PC*, если радиус первой окружности втрое больше радиуса второй.

(*ЕГЭ-2014, Д.Р.*)

1. Две окружности пересекаются в точках *A* и *B*. Из точки *C*, лежащей на продолжении отрезка *AB* за точку *B*, проведена касательная *CK* к первой окружности, не пересекающая вторую окружность, и касательная *CT* ко второй окружности, не пересекающая первую окружность (*K* и *T* − точки касания). Прямая, проходящая через центры окружностей, пересекает дугу *AKB* первой окружности в точке *P*, а дугу *ATB* второй окружности − в точке *H*.

а) Докажите, что *CT = CK*.

б) Найдите длину отрезка *KT*, если *CT* = 1, а сумма дуг *KP* и *TH* равна 60°.

(Сб.7, 2020)

1. Окружность с центром *O* вписана в угол, равный 60°. Окружность большего радиуса с центром *O*1 также вписана в этот угол и проходит через точку *O*.

а) Докажите, что радиус второй окружности вдвое больше радиуса первой.

б) Найдите длину общей хорды этих окружностей, если известно, что радиус первой окружности равен .

(Сб.12, 2019, Сб.1, 2017)

1. Окружность с центром *O* вписана в угол, равный 60°. Окружность большего радиуса с центром *O*1 также вписана в этот угол и проходит через точку *O*.

а) Докажите, что радиус второй окружности вдвое больше радиуса первой.

б) Найдите длину общей хорды этих окружностей, если известно, что радиус первой окружности равен .

(Сб.1, 2017)

1. На катетах *AC* и *BC* прямоугольного треугольника *ABC* как на диаметрах построены окружности, второй раз пересекающиеся в точке *M*. Точка *Q* лежит на меньшей дуге *MB* окружности с диаметром *BC*. Прямая *CQ* второй раз пересекает окружность с диаметром *AC* в точке *P*.

а) Докажите, что прямые *PM* и *QM* перпендикулярны.

б) Найдите *PQ*, если *AM* = 1, *BM* = 3, а *Q* − середина дуги *MB*.

(***ЕГЭ-2016, резервный день основной волны***) Гущин

1. На катетах *AC* и *BC* прямоугольного треугольника *ABC* как на диаметрах построены окружности, второй раз пересекающиеся в точке *M*. Точка *Q* лежит на меньшей дуге *MB* окружности с диаметром *BC*. Прямая *CQ* второй раз пересекает окружность с диаметром *AC* в точке *P*.

а) Докажите, что прямые *PM* и *QM* перпендикулярны.

б) Найдите *PQ*, если *AM* = 6, *BM* = 2, а *Q* − середина дуги *MB*.

(***ЕГЭ-2016, резервный день основной волны***) Гущин

1. Точка *M* – середина гипотенузы *AB* прямоугольного треугольника *ABC.* Около треугольников *ACM* и *BCM* описаны окружности с центрами *O*1 и *O*2 соответственно.

а) Докажите, что треугольник *O*1*MO*2 прямоугольный.

б) Найдите расстояние между центрами окружностей, если *AC* = 72, *BC* = 96.

(Сб.12, 2019)

1. Окружности, построенные на сторонах *AB* и *AC* треугольника *ABC* как на диаметрах, пересекаются в точке *D*, отличной от точки *A*.

а) Докажите, что точка *D* лежит на прямой *BC*.

б) Найдите угол *BAC*, если известно, что ∠*ACB* = 30°, а точка *D* лежит на стороне *BC*, причём *DB* : *DC*= 1:3.

(Сб.8, 2020, Сб.12, 2019)

1. На диагоналях трапеции как на диаметрах построены окружности.

а) Докажите, что их общая хорда перпендикулярна основаниям трапеции.

б) Найдите длину этой хорды, если основания трапеции равны 1 и 11, а диагонали – 6 и 8.

(Сб.12, 2019)

1. Дана трапеция с основаниями *AD* и *BC*. Окружности, построенные на боковых сторонах *AB* и *CD* как на диаметрах, пересекаются в точках *M* и *N*.

а) Докажите, что *MN* ⊥ *AD*.

б) Найдите *MN*, если боковые стороны трапеции равны 12 и 16, а сумма проекций диагоналей на большее основание равна 20.

(Сб.12, 2019)

1. Дана трапеция *KLMN* с основаниями *KN* и *LM*. Окружности, построенные на боковых сторонах *KL* и *MN* как на диаметрах, пересекаются в точках *A* и *B*.

а) Докажите, что средняя линия трапеции лежит на серединном перпендикуляре к отрезку *AB*.

б) Найдите *AB*, если известно, что боковые стороны трапеции равны 26 и 28, а средняя линия трапеции равна 15.

(*ЕГЭ-2016, Т.Р. 10кл.*, Сб.9, 2019)

1. Дана трапеция *KLMN* с основаниями *KN* и *LM*. Окружности, построенные на боковых сторонах *KL* и *MN* как на диаметрах, пересекаются в точках *A* и *B*.

а) Докажите, что средняя линия трапеции лежит на серединном перпендикуляре к отрезку *AB*.

б) Найдите *AB*, если известно, что боковые стороны трапеции равны 14 и 30, а средняя линия трапеции равна 20.

(*ЕГЭ-2016, Т.Р. 10кл.,* Сб.9, 2019)

1. К двум непересекающимся окружностям равных радиусов проведены две параллельные общие касательные. Окружности касаются одной из этих прямых в точках *A* и *B*. Через точку *C*, лежащую на отрезке *AB*, проведены касательные к этим окружностям, пересекающие вторую прямую в точках *D* и *E*, причём отрезки *CA* и *CD* касаются одной окружности, а отрезки *CB* и *CE* − другой.

а) Докажите, что периметр треугольника *CDE* вдвое больше расстояния между центрами окружностей.

б) Найдите *DE*, если радиусы окружностей равны 5, расстояние между их центрами равно 18, а *AC* = 8.

(***ЕГЭ-2015, основная волна***) Гущин

1. Две окружности касаются внутренним образом. Третья окружность касается первых двух и их линии центров.

а) Докажите, что периметр треугольника с вершинами в центрах трёх окружностей равен диаметру наибольшей из этих окружностей.

б) Найдите радиус третьей окружности, если известно, что радиусы первых двух равны 6 и 2.

(Сб.12, 2019, *ЕГЭ-2014, П.Р. ФЦТ ФИПИ*)

1. Две окружности касаются внутренним образом. Третья окружность касается первых двух и их линии центров.

а) Докажите, что периметр треугольника с вершинами в центрах трёх окружностей равен диаметру наибольшей из этих окружностей.

б) Найдите радиус третьей окружности, если известно, что радиусы первых двух равны 4 и 1.

(Сб.4, 2020)

1. В полуокружности расположены две окружности, касающиеся друг друга, полуокружности и её диаметра.

а) Докажите, что периметр треугольника с вершинами в центрах окружностей и полуокружности равен диаметру полуокружности.

б) Известно, что радиус полуокружности равен 8, а радиус одной из окружностей равен 4. Найдите радиус другой.

(Сб.12, 2019)

1. Три окружности разных радиусов попарно касаются друг друга внутренним образом. Отрезки, соединяющие их центры, образуют прямоугольный треугольник.

а) Докажите, что точки касания вписанной в этот треугольник окружности с его сторонами совпадают с точками касания окружностей между собой.

б) Найдите радиус меньшей окружности, если радиусы большей и средней равны 6 и 4.

(Сб.7, 2020)

***6. Треугольник и окружность***

1. Окружность с центром *O*, вписанная в прямоугольный треугольник *АВС*, касается гипотенузы *АВ* в точке *М*, а катета *АС* − в точке *N*, *AC* < *BC*. Прямые *MN* и *СО* пересекаются в точке *К.*

а) Докажите, что угол *CKN* в два раза меньше угла *АВС*.

б) Найдите *ВК*, если *BC* =.

(Сб.2, Сб.3, Сб.4, 2020)

1. Окружность с центром *O*, вписанная в прямоугольный треугольник *АВС*, касается гипотенузы *АВ* в точке *М*, а катета *АС* − в точке *N*, *AC* < *BC*. Прямые *MN* и *СО* пересекаются в точке *К.*

а) Докажите, что угол *CKN* в два раза меньше угла *АВС*.

б) Найдите *ВК*, если *BC* =.

(Сб.4, 2020)

1. В треугольник *ABC* вписана окружность радиуса *R*, касающаяся стороны *AC* в точке *D*, причём *AD* = *R*.

а) Докажите, что треугольник *ABC* прямоугольный.

б) Вписанная окружность касается сторон *AB* и *BC* в точках *E* и *F*. Найдите площадь треугольника *BEF*, если известно, что *R* = 2 и *CD* = 10.

(*ЕГЭ-2014, Д.Р., ЕГЭ-2014, Д.Р. 10кл.*, Сб.10, 2019) вместо *R* лучше использовать *r*

1. В треугольник *ABC* вписана окружность радиуса *R*, касающаяся стороны *AC* в точке *D*, причём *AD* = *R*.

а) Докажите, что треугольник *ABC* прямоугольный.

б) Вписанная окружность касается сторон *AB* и *BC* в точках *E* и *F*. Найдите площадь треугольника *BEF*, если известно, что *R* = 5 и *CD* = 15.

(*ЕГЭ-2014, Д.Р., ЕГЭ-2014, Д.Р. 10кл.*, Сб.10, Сб.12, 2019) вместо *R* лучше использовать *r*

1. Точка *O* − центр окружности вписанной в треугольник *ABC*. Точка *М* − середина стороны *АС*. Угол *AOC* равен 135°.

а) Докажите, что угол *ABC* прямой.

б) Прямые *MO* и *BC* пересекаются в точке *K*. Найдите отношение *BK*: *CK*, если *AB* = 15, *AC* = 8.

(***ЕГЭ-2018, досрочная волна***)

1. Биссектрисы острых углов *A* и *B* прямоугольного треугольника *АВС* пересекают окружность, описанную около этого треугольника, в точках *A*1 и *B*1 соответственно.

а) Докажите, что угол *A*1*BB*1равен 45°.

б) Биссектриса угла *C* пересекает окружность, описанную около треугольника *ABC*, в точке *C*1. Найдите *B*1*C*1, если *AB* =, ∠*BAC* = 60°.

(***ЕГЭ-2020, резервный вариант***) Гущин

1. Биссектриса прямого угла прямоугольного треугольника *АВС* вторично пересекает окружность, описанную около этого треугольника, в точке *L*. Прямая, проходящая через точку *L* и середину *N* гипотенузы *АВ*, пересекает катет *BC* в точке *М*.

а) Докажите, что ∠*BML* = ∠*BAC*.

б) Найдите площадь треугольника *ABC*, если *AB* = 20 и *CM* =.

(***ЕГЭ-2020, резервный день основной волны***)

1. В треугольнике *АВС* высота *CH*, биссектриса *CL* и медиана *CM* делят угол *ACB* на четыре равных угла.

а) Докажите, что треугольник *АВС* прямоугольный.

б) Найдите длины высоты *CH*, биссектрисы *CL* и медианы *CM*, если радиус окружности, описанной около треугольника *ABC*, равен *R*.

(Сб.12, 2019)

1. В треугольник *ABC* вписана окружность радиуса 2, касающаяся стороны *AC* в точке *M*, причём *AM*= 4 и *CM*= 6.

а) Докажите, что треугольник *ABC* прямоугольный.

б) Найдите расстояние между центрами вписанной и описанной окружностей треугольника *ABC*.

(*ЕГЭ-2020, Т.Р.*)

1. В треугольник *ABC* вписана окружность радиуса 4, касающаяся стороны *AC* в точке *M*, причём *AM*= 8 и *CM*= 12.

а) Докажите, что треугольник *ABC* прямоугольный.

б) Найдите расстояние между центрами вписанной и описанной окружностей треугольника *ABC*.

(*ЕГЭ-2020, Т.Р.*)

1. В треугольник *ABC* вписана окружность радиуса *R*, касающаяся стороны *AC* в точке *M*, причём

а) Докажите, что треугольник *ABC* прямоугольный.

б) Найдите расстояние между центрами его вписанной и описанной окружностей, если известно, что *R* = 2.

(*ЕГЭ-2016, Т.Р.*, Сб.9, 2019)

1. В треугольник *ABC* вписана окружность радиуса *R*, касающаяся стороны *AC* в точке *M*, причём *AM =*5*R* и *CM =* 1,5*R*.

а) Докажите, что треугольник *ABC* прямоугольный.

б) Найдите расстояние между центрами его вписанной и описанной окружностей, если известно, что *R* = 4.

(*ЕГЭ-2016, Т.Р.*, Сб.9, 2019)

1. В треугольник *ABC* вписана окружность радиуса *r*, касающаяся стороны *AC* в точке *M*, причём *AM =*4*r* и *CM =r*.

а) Докажите, что треугольник *ABC* прямоугольный.

б) Найдите расстояние между центрами его вписанной и описанной окружностей, если известно, что *r* = 3.

(Сб.8, 2020)

1. В треугольник *ABC* вписана окружность радиуса *r*, касающаяся стороны *AC* в точке *M*, причём *AM =*7*r* и *CM =r*.

а) Докажите, что треугольник *ABC* прямоугольный.

б) Найдите расстояние между центрами его вписанной и описанной окружностей, если известно, что *r* = 3.

(Сб.8, 2020)

1. Дан треугольник со сторонами *AC* = 6, *BC* = 8 и *AB* = 10. Вписанная в него окружность с центром *I* касается стороны *BC* в точке *L*, *M* − середина *BC*, *AP* − биссектриса треугольника *ABC*, *O* − центр описанной около него окружности.

а) Докажите, что *P −* середина отрезка *LM*.

б) Пусть прямые *OI* и *AC* пересекаются в точке *K*, а продолжение биссектрисы *AP* пересекает описанную окружность в точке *Q*. Найдите площадь четырёхугольника *OKCQ*.

(*ЕГЭ-2019, Т.Р.*)

1. Дан треугольник со сторонами *AC* = 30, *BC* = 40 и *AB* = 50. Вписанная в него окружность с центром *I* касается стороны *BC* в точке *L*, *M* − середина *BC*, *AP* − биссектриса треугольника *ABC*, *O*− центр описанной около него окружности.

а) Докажите, что *P −* середина отрезка *LM*.

б) Пусть прямые *OI* и *AC* пересекаются в точке *K*, а продолжение биссектрисы *AP* пересекает описанную окружность в точке *Q*. Найдите площадь четырёхугольника *OKCQ*.

(*ЕГЭ-2019, Т.Р.*)

1. Медианы *AA*1, *BB*1, *CC*1 треугольника *ABC* пересекаются в точке *M*. Известно, что *AB* = 6*MC*.

а) Докажите, что треугольник *ABC* прямоугольный.

б) Найдите длину отрезка *DN*, где *D* – точка касания стороны *AC* и вписанной в треугольник *ABC* окружности, *N* – точка касания стороны *AC* и окружности, касающейся стороны *AC* и продолжений сторон *BA* и *BC* треугольника *ABC*, если известно, что *AB* = 13, *AC* = 5.

(*ЕГЭ-2014, П.Р. ФЦТ ФИПИ*)

1. Точка *M* – середина гипотенузы *AB* прямоугольного треугольника *ABC*. На отрезке *CM* как на диаметре построена окружность.

а) Докажите, что тона проходит через середины катетов.

б) *AP* и *BQ* – касательные к этой окружности (*P* и *Q* – точки касания). Найдите отношение *AP* : *BQ* , если tg∠*ABC* =2.

(Сб.12, 2019)

1. Дан прямоугольный треугольник *ABC* с прямым углом *C*. На катете *AC* взята точка *M*. Окружность с центром *O* и диаметром *CM* касается гипотенузы в точке *N*.

а) Докажите, что прямые *MN* и *BO* параллельны.

б) Найдите площадь четырёхугольника *BOMN*, если *CN =* 4 и *AM* : *MC =* 1:3.

(Сб.6, 2019, Сб.11, 2017)

1. Дан прямоугольный треугольник *RST* с прямым углом *T*. На катете *RT* взята точка *M*. Окружность с центром *O* и диаметром *TM* касается гипотенузы в точке *N*.

а) Докажите, что прямые *MN* и *SO* параллельны.

б) Найдите площадь четырёхугольника *SOMN*, если *TN* = 8 и *RM* : *MT* = 1:3.

(*ЕГЭ-2016, П.Р. ФЦТ ФИПИ*)

1. Полуокружность радиуса , центр *O* которой лежит на гипотенузе *AC* прямоугольного треугольника *ABC*, касается его катетов *AB* и *BC* в точках *P* и *Q* соответственно.

а) Докажите, что треугольники *APO* и *OQC* подобны.

б) Найдите площадь треугольника *ABC*, если *OA* =.

(Сб.7, 2020)

1. Из точки *A* проведены секущая и касательная к окружности радиуса *R*. Пусть *B* – точка касания, а *D* и *C* – точки пересечения секущей с окружностью, причём точка *D* лежит между *A* и *C*. Известно, что *BD* – биссектриса треугольника *ABC* и её длина равна *R*.

а) Докажите, что треугольник *ABC* прямоугольный.

б) Найдите расстояние от точки *A* до центра окружности.

(Сб.12, 2019)

1. Точка *M* − середина гипотенузы *AB* прямоугольного треугольника *ABC* с углом 30° при вершине *A*. Окружность, вписанная в треугольник *BMC*, касается его сторон *BC* и *BM* в точках *P* и *Q*.

а) Докажите, что PQ ‖ CM‌.

б) Найдите *PQ*, если *AB* = 8.

(Сб.12, 2019)

1. Дан треугольник *ABC* со сторонами *AB* = 20, *AC* = 12 и *BC* = 16. Точки *M* и *N −* середины сторон *AB* и *AC* соответственно.

а) Докажите, что окружность, вписанная в треугольник *ABC*, касается одной из средних линий.

б) Найдите общую хорду окружностей, одна из которых вписана в треугольник *ABC*, а вторая описана около треугольника *AMN*.

(*ЕГЭ-2019, Т.Р.*)

1. Дан треугольник *ABC* со сторонами *AB* = 50, *AC* = 30 и *BC* = 40. Точки *M* и *N −* середины сторон *AB* и *AC* соответственно.

а) Докажите, что окружность, вписанная в треугольник *ABC*, касается одной из средних линий.

б) Найдите общую хорду окружностей, одна из которых вписана в треугольник *ABC*, а вторая описана около треугольника *AMN*.

(*ЕГЭ-2019, Т.Р.*)

1. В прямоугольном треугольнике *ABC* катеты *AB* и *AC* равны 4 и 3 соответственно. Точка *D* делит гипотенузу *BC* пополам.

а) Докажите, что треугольники *ABD* и *ACD* равнобедренные.

б) Найдите расстояние между центрами вписанных окружностей треугольников *ABD* и *ACD*.

(Сб.7, 2020)

1. В прямоугольном треугольнике *ABC* проведена высота *CH* из вершины прямого угла. В треугольники *ACH* и *BCH* вписаны окружности с центрами *O*1 и *O*2 соответственно, касающиеся прямой *CH* в точках *M* и *N* соответственно.

а) Докажите, что прямые *AO*1 и *CO*2 перпендикулярны.

б) Найдите площадь четырёхугольника *MO*1*NO*2, если *AC* = 12 и *BC* = 5.

(***ЕГЭ-2017, основная волна Центр***) Гущин

1. В прямоугольном треугольнике *ABC* проведена высота *CH* из вершины прямого угла. В треугольники *ACH* и *BCH* вписаны окружности с центрами *O*1 и *O*2 соответственно, касающиеся прямой *CH* в точках *M* и *N* соответственно.

а) Докажите, что прямые *AO*1 и *CO*2 перпендикулярны.

б) Найдите площадь четырёхугольника *MO*1*NO*2, если *AC* = 20 и *BC* = 15.

(***ЕГЭ-2017, основная волна Центр***) Гущин

1. Точка *M* − середина гипотенузы *AB* прямоугольного треугольника *ABC*. Серединный перпендикуляр к гипотенузе пересекает катет *BC* в точке *N*.

а) Докажите, что ∠*CAN* = ∠*CMN*.

б) Найдите отношение радиусов окружностей, описанных около треугольников *ANB* и *CBM*, если tg∠*BAC* =.

(***ЕГЭ-2017, резервный день досрочной волны***) Гущин

1. Точка *M* − середина гипотенузы *AB* прямоугольного треугольника *ABC*. Серединный перпендикуляр к гипотенузе пересекает катет *BC* в точке *N*.

а) Докажите, что ∠*CAN* = ∠*CMN*.

б) Найдите отношение радиусов окружностей, описанных около треугольников *ANB* и *CBM*, если tg∠*BAC* =.

(***ЕГЭ-2017, резервный день досрочной волны***)

1. В равнобедренный треугольник *ABC* (*AB* = *BC*) вписана окружность. Прямая *l* касается этой окружности и параллельна прямой *AC*. Расстояние от точки *B* до прямой *l* равно радиусу окружности.

а) Докажите, что треугольник *ABC* равносторонний.

б) Найдите расстояние между точками, в которых данная окружность касается сторон *AB* и *BC*, если радиус окружности равен 3.

(Сб.12, 2019)

1. Основание и боковая сторона равнобедренного треугольника равны 34 и 49 соответственно.

а) Докажите, что средняя линия треугольника, параллельная основанию, пересекает окружность, вписанную в треугольник.

б) Найдите длину отрезка этой средней линии, заключённого внутри окружности.

(Сб.6, 2019)

1. Основание и боковая сторона равнобедренного треугольника равны 26 и 38 соответственно.

а) Докажите, что средняя линия треугольника, параллельная основанию, пересекает окружность, вписанную в треугольник.

б) Найдите длину отрезка этой средней линии, заключённого внутри окружности.

(Сб.12, 2019)

1. Сторона *BC* треугольника *ABC* равна 48. Около треугольника описана окружность радиуса 25. Известно, что радиус *OA* делит сторону *BC* на два равных отрезка.

а) Докажите, что треугольник *ABC* равнобедренный.

б) Найдите его боковые стороны.

(Сб.8, 2020, Сб.12, 2019)

1. Около равнобедренного треугольника *ABC* с основанием *BC* описана окружность. Через точку *C* провели прямую, параллельную стороне *AB*. Касательная к окружности, проведённая в точке *B,* пересекает эту прямую в точке *K*.

а) Докажите, что треугольник *BCK* – равнобедренный.

б) Найдите отношение площади треугольника *ABC* к площади треугольника *BCK,* если cos∠*BAC*=.

(***ЕГЭ-2014, резервный вариант***) Гущин

1. Окружность с центром *O* касается боковой стороны *AB* равнобедренного треугольника *ABC*, продолжения боковой стороны *AC* и продолжения основания *BC* в точке *N*. Точка *M* – середина основания *BC*.

а) Докажите, что *AN* = *OM*.

б) Найдите *OM*, если стороны треугольника *ABC* равны 10, 10 и 12.

(Сб.8, 2020, Сб.12, 2019, Сб.5, 2018)

1. Дан треугольник со сторонами 25, 25 и 48.

а) Докажите, что он тупоугольный.

б) Найдите расстояние между центрами его вписанной и описанной окружностей.

(Сб.12, 2019)

1. Окружность с центром *O* касается боковой стороны *AB* равнобедренного треугольника *ABC*, продолжения боковой стороны *AC* и продолжения основания *BC* в точке *N*. Точка *M* – середина основания *BC*.

а) Докажите, что *AN* = *OM*.

б) Найдите *OM*, если стороны треугольника *ABC* равны 13, 13 и 10.

(Сб.5, 2018)

1. Окружность с центром *O* касается боковой стороны *AB* равнобедренного треугольника *ABC*, продолжения боковой стороны *AC* и продолжения основания *BC* в точке *N*. Точка *M* – середина основания *BC*.

а) Докажите, что *AN* = *OM*.

б) Найдите *OM*, если стороны треугольника *ABC* равны 13, 13 и 24.

(Сб.5, 2018)

1. Вневписанная окружность равнобедренного треугольника касается его боковой стороны.

а) Докажите, что радиус этой окружности равен высоте треугольника, опущенной на основание.

б) Известно, что радиус этой окружности в пять раз больше радиуса вписанной окружности треугольника. В каком отношении точка касания вписанной окружности с боковой стороной треугольника делит эту сторону?

(Сб.12, 2019)

1. Вневписанная окружность равнобедренного треугольника касается его боковой стороны.

а) Докажите, что радиус этой окружности равен высоте треугольника, опущенной на его основание.

б) Известно, что радиус этой окружности в 6 раз больше радиуса вписанной окружности треугольника. В каком отношении точка касания вписанной окружности с боковой стороной треугольника делит эту сторону?

(Сб.6, 2018)

1. Стороны треугольника относятся как 2:3:3.

а) Докажите, что точки касания вписанной и вневписанной окружностей треугольника делят его бóльшую сторону на три равных отрезка.

б) Найдите отношение радиусов этих окружностей.

(Сб.12, 2019)

1. Первая окружность с центром *O*, вписанная в равнобедренный треугольник *KLM*, касается боковой стороны *KL* в точке *B*, а основания *ML −* в точке *A*. Вторая окружность с центром *O*1 касается основания *ML* и продолжений боковых сторон.

а) Докажите, что треугольник *OLO*1 прямоугольный.

б) Найдите радиус второй окружности, если известно, что радиус первой равен 6 и *AK* = 16.

(*ЕГЭ-2016, Т.Р.*)

1. Первая окружность с центром *O*, вписанная в равнобедренный треугольник *KLM*, касается боковой стороны *KL* в точке *B*, а основания *ML −* в точке *A*. Вторая окружность с центром *O*1 касается основания *ML* и продолжений боковых сторон.

а) Докажите, что треугольник *OLO*1 прямоугольный.

б) Найдите радиус второй окружности, если известно, что радиус первой равен 15 и *AK* = 32.

(*ЕГЭ-2016, Т.Р.*)

1. Первая окружность с центром *O*, вписанная в равнобедренный треугольник *ABC*, касается боковой стороны *AB* в точке *P*, а основания *BC* – в точке *M*. Вторая окружность с центром *O*1, касающаяся основания *BC* и продолжений боковых сторон, касается прямой *AB* в точке *Q*.

а) Докажите, что треугольник *PMQ* прямоугольный.

б) Найдите радиус второй окружности, если известно, что высота треугольника, проведённая из вершины *A*, равна 45, а точка *P* делит боковую сторону *AB* в отношении 9:8, считая от вершины *A*.

(Сб.8, 2020, Сб.12, 2019)

1. На боковой стороне *АВ* равнобедренного треугольника, как на диаметре, построена окружность. Она пересекает основание *АС* в точке *М* и боковую сторону *СВ* в точке *N*.

а) Докажите, что *MN* =*AC*.

б) Найдите периметр треугольника *МNС*, если *АВ* = 10, *АС* = 8.

(Сб.9, 2019) исправлена опечатка в задании

1. Окружность, построенная на стороне *AC* треугольника *ABC* как на диаметре, проходит через середину стороны *BC* и пересекает в точке *D* продолжение стороны *AB* за точку *A*.

а) Докажите, что треугольник *ABC* − равнобедренный.

б) Найдите площадь треугольника *ABC*, если *AD* =*AB*, *AC* = 1.

(Сб.7, 2020)

1. Окружность, построенная на медиане *BM* равнобедренного треугольника *ABC* как на диаметре, второй раз пересекает основание *BC* в точке *K*.

а) Докажите, что отрезок *BK* втрое больше отрезка *CK*.

б) Пусть указанная окружность пересекает сторону *AB* в точке *N*. Найдите *AB*, если *BK* = 9 и *BN*= 11.

(***ЕГЭ-2015, резервный день досрочной волны***)

1. Окружность, построенная на медиане *BM* равнобедренного треугольника *ABC* как на диаметре, второй раз пересекает основание *BC* в точке *K*.

а) Докажите, что отрезок *BK* втрое больше отрезка *CK*.

б) Пусть указанная окружность пересекает сторону *AB* в точке *N*. Найдите *AB*, если *BK* = 18 и *BN*= 17.

(***ЕГЭ-2015, резервный день досрочной волны***, Сб.12, 2019)

1. Окружность, построенная на биссектрисе *BL* равнобедренного треугольника *ABC* как на диаметре, пересекает основание *BC* в точке *P*. Боковая сторона треугольника вдвое больше его основания.

а) Докажите, что *BP* = 5*CP*.

б) Пусть указанная окружность пересекает сторону *AB* в точке *M*. Найдите *BL*, если *ML* =.

(Сб.12, 2019)

1. Окружность касается стороны *AC* остроугольного треугольника *ABC* и делит каждую из сторон *AB* и *BC* на три равные части.

а) Докажите, что треугольник *ABC* − равнобедренный.

б) Найдите, в каком отношении высота этого треугольника делит сторону *BC*.

(***ЕГЭ-2016, основная волна***)

Окружность касается стороны *AC* остроугольного треугольника *ABC* и делит каждую из сторон *AB* и *BC* на три равные части.

а) Докажите, что *AB* = *BC*.

б) Найдите, в каком отношении высота этого треугольника, проведённая из вершины *A*, делит сторону *BC*.

(***ЕГЭ-2019, резервный день основной волны***)

1. Хорда *AB* окружности параллельна касательной, проходящей через точку *C*, лежащую на окружности.

а) Докажите, что треугольник *ABC* равнобедренный.

б) Найдите радиус окружности, если расстояние между касательной и прямой *AB* равно 1 и ∠*ACB =*150°.

(Сб.12, 2019)

1. Окружность с центром *O* вписана в треугольник *ABC* со сторонами *AB* = 13, *AC* = 14 и *BC* = 15.

а) Докажите, что радиус окружности в три раза меньше высоты *BH*.

б) Пусть *P* − точка касания окружности со стороной *AC*, *F* − точка пересечения прямой *OP* с медианой *BM* треугольника *ABC*. Найдите отрезок *FH*.

(Сб.9, 2019)

1. Окружность с центром *O* вписана в треугольник *ABC* со сторонами *AB* = 8, *AC* = 7 и *BC* = 9.

а) Докажите, что радиус окружности в три раза меньше высоты *CH*.

б) Пусть *P* − точка касания окружности со стороной *AB*, *F* − точка пересечения прямой *OP* с медианой *CM* треугольника *ABC*. Найдите отрезок *FH*.

(Сб.9, 2019)

1. В треугольнике *АВС* угол *АВС* равен 60°. Окружность, вписанная в треугольник, касается стороны *AC* в точке *M*.

а) Докажите, что отрезок *BM* не больше утроенного радиуса вписанной в треугольник окружности.

б) Найдите sin∠*BMC*, если известно, что отрезок *ВМ* в 2,5 раза больше радиуса вписанной в треугольник окружности.

(***ЕГЭ-2016, основная волна Юг***) Гущин

1. Окружность с центром *O*, вписанная в треугольник *ABC*, касается сторон *AB* и *AC* в точках *M* и *N* соответственно, *AH* – высота треугольника. Прямые *MN* и *BC* пересекаются в точке *K*.

а) Докажите, что ∠*MKB* = ∠*OAH*.

б) Найдите *AK*, если ∠*ABC* = 77°, ∠ *ACB* = 17°, а отрезок, соединяющий точку *H* с серединой *MN*, равен 8.

(Сб.12, 2019)

1. Окружность с центром *O*, вписанная в треугольник *ABC*, касается стороны *BC* в точке *K*. К этой окружности проведена касательная, параллельная биссектрисе *AP* треугольника и пересекающая стороны *AC* и *BC* в точках *M* и *N* соответственно.

а) Докажите, что угол *MOC* равен углу *NOK*.

б) Найдите периметр треугольника *ABC*, если отношение площадей трапеции *AMNP* и треугольника *ABC* равно 2:7, *MN* = 1, *AM* + *PN* = 3.

(*ЕГЭ-2019, Т.Р.*)

1. Окружность с центром *O*, вписанная в треугольник *ABC*, касается стороны *BC* в точке *K*. К этой окружности проведена касательная, параллельная биссектрисе *AP* треугольника и пересекающая стороны *AC* и *BC* в точках *M* и *N* соответственно.

а) Докажите, что угол *MOC* равен углу *NOK*.

б) Найдите периметр треугольника *ABC*, если отношение площадей трапеции *AMNP* и треугольника *ABC* равно 2:7, *MN* = 2, *AM* + *PN* = 6.

(*ЕГЭ-2019, Т.Р.*)

1. Окружность, вписанная в треугольник *ABC*, касается сторон *BC* и *AC* в точках *M* и *N* соответственно, *E* и *F −* середины сторон *AB* и *AC* соответственно. Прямые *MN* и *EF* пересекаются в точке *D*.

а) Докажите, что треугольник *DFN* равнобедренный.

б) Найдите площадь треугольника *BED*, если *AB* = 20 и ∠*ABC* = 60°.

(*ЕГЭ-2019, Т.Р. 10-11кл., ЕГЭ-2018, Т.Р. 10кл.*)

1. Окружность, вписанная в треугольник *ABC*, касается сторон *BC* и *AC* в точках *M* и *N* соответственно, *E* и *F −* середины сторон *AB* и *AC* соответственно. Прямые *MN* и *EF* пересекаются в точке *D*.

а) Докажите, что треугольник *DFN* равнобедренный.

б) Найдите площадь треугольника *BED*, если *AB* = 28 и ∠*ABC* = 60°.

(*ЕГЭ-2019, Т.Р. 10-11кл., ЕГЭ-2018, Т.Р. 10кл.*)

1. Дан треугольник *ABC* со сторонами *AB* = 4, *BC* = 6 и *AC* = 8.

а) Докажите, что прямая, проходящая через точку пересечения медиан и центр вписанной окружности, параллельна стороне *BC*.

б) Найдите длину биссектрисы треугольника *ABC*, проведённой из вершины *A*.

(Сб.12, 2019)

1. Дан треугольник *ABC* со сторонами *AB* = 4, *BC* = 5 и *AC* = 6.

а) Докажите, что прямая, проходящая через точку пересечения медиан и центр вписанной окружности, параллельна стороне *BC*.

б) Найдите длину биссектрисы треугольника *ABC*, проведённой из вершины *A*.

(Сб.5, 2018)

1. Две стороны треугольника равны 1 и 5, площадь треугольника равна 2. Медиана, проведённая к его третьей стороне, меньше её половины.

а) Докажите, что треугольник тупоугольный.

б) Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.

(Сб.12, 2019)

1. Высоты *BB*1 и *CC*1 остроугольного треугольника *ABC* пересекаются в точке *H.*

а) Докажите, что ∠*BB*1*C*1 = ∠*BAH*.

б) Найдите расстояние от центра описанной окружности треугольника *ABC* до стороны *BC*, если *B*1*C*1 = 12 и ∠*BAC* = 60°.

(Сб.12, 2019)

1. Высоты *BB*1 и *CC*1 остроугольного треугольника *ABC* пересекаются в точке *H.*

а) Докажите, что ∠*BB*1*C*1 = ∠*BAH*.

б) Найдите расстояние от центра окружности, описанной около треугольника *ABC*, до стороны *BC*, если *B*1*C*1 =** и ∠*BAC* = 60°.

(Сб.10, 2019)

1. Высоты *BB*1 и *CC*1 остроугольного треугольника *ABC* пересекаются в точке *H.*

а) Докажите, что ∠*BB*1*C*1 = ∠*BAH*.

б) Найдите расстояние от центра окружности, описанной около треугольника *ABC*, до стороны *BC*, если *B*1*C*1 =** и ∠*BAC* = 30°.

(Сб.10, 2019)

1. В остроугольном треугольнике *ABC* из вершин *A* и *C* опустили высоты *AP* и *CQ* на стороны *BC* и *AB*.

а) Докажите, что ∠*BPQ* = ∠*BAC.*

б) Известно, что площадь треугольника *ABC* равна 96, площадь четырёхугольника *AQPC* равна 72, а радиус окружности, описанной около треугольника *ABC*, равен . Найдите *PQ*.

(Сб.12, 2019)

1. В остроугольном треугольнике *ABC* провели высоту *BH*. Из точки *H* на стороны *AB* и *BC* опустили перпендикуляры *HK* и *HM* соответственно.

а) Докажите, что треугольник *MBK* подобен треугольнику *ABC.*

б) Найдите отношение площади треугольника *MBK* к площади четырёхугольника *AKMC*, если *BH* = 1, а радиус окружности, описанной около треугольника *ABC,* равен 4.

(***ЕГЭ-2014, основная волна Восток***) Гущин

1. В остроугольном треугольнике *ABC* провели высоту *BH*. Из точки *H* на стороны *AB* и *BC* опустили перпендикуляры *HK* и *HM* соответственно.

а) Докажите, что треугольник *MBK* подобен треугольнику *ABC.*

б) Найдите отношение площади треугольника *MBK* к площади четырёхугольника *AKMC*, если *BH* = 2, а радиус окружности, описанной около треугольника *ABC,* равен 4.

(***ЕГЭ-2014, основная волна Восток***) Гущин

1. В остроугольном треугольнике *ABC* провели высоту *BH*. Из точки *H* на стороны *AB* и *BC* опустили перпендикуляры *HK* и *HM* соответственно.

а) Докажите, что треугольник *MBK* подобен треугольнику *ABC.*

б) Найдите отношение площади треугольника *MBK* к площади четырёхугольника *AKMC*, если *BH* = 3, а радиус окружности, описанной около треугольника *ABC,* равен 4.

(Сб.10, 2019, Сб.11, 2017, Сб.11, 2015)

1. Около треугольника *ABC* описана окружность. Диаметр *AD* пересекает сторону *BC* в точке *E*, при этом *AE* = *AC*.

а) Докажите, что *BD* = *BE.*

б) Найдите отношение *DE* : *AE*, если известно, что *BE* : *CE* = 2:3.

(Сб.12, 2019)

1. Точка *O* − центр окружности, описанной около остроугольного треугольника *ABC*, а *BH* − высота этого треугольника.

а) Докажите, что углы *ABH* и *CBO* равны.

б) Найдите *BH*, если *AB* = 8, *BC* = 9, *BH = BO*.

(***ЕГЭ-2018, резервный день основной волны***) Гущин

1. Точка *O* − центр окружности, описанной около остроугольного треугольника *ABC*, а *BH* − высота этого треугольника.

а) Докажите, что углы *ABH* и *CBO* равны.

б) Найдите *BH*, если *AB* = 16, *BC* = 18, *BH = BO*.

(***ЕГЭ-2018, резервный день основной волны***) Гущин

1. Около треугольника *ABC* описана окружность. Касательная к окружности, проходящая через точку *B*, пересекает прямую *AC* в точке *M*.

а) Докажите, что треугольники *AMB* и *BMC* подобны.

б) Найдите отношение *AM*: *MC,* если известно, что *AB*: *BC* = 3:2.

(Сб.8, 2020, Сб.12, 2019)

1. Пусть *CQ* – биссектриса треугольника *ABC*. Касательная к описанной окружности треугольника *ABC*, проходящая через точку *C*, пересекает прямую *AB* в точке *D*.

а) Докажите, что треугольник *CDQ* равнобедренный*.*

б) Найдите CD, если *BQ* = *a* и *AQ = b* (*a* > *b*).

(Сб.12, 2019)

1. Высота *AA*1 остроугольного треугольника *ABC* продолжена до пересечения с описанной окружностью в точке *P*, *H* – точка пересечения высот, *O* – центр описанной окружности.

а) Докажите, что *A*1 – середина отрезка *HP*.

б) Найдите *OH*, если *AH* = 3, *A*1*H* = 2, а радиус описанной окружности равен 4.

(Сб.12, 2019)

1. В остроугольном треугольнике *ABC* все стороны различны. Прямая, содержащая высоту *BH* треугольника *ABC*, вторично пересекает описанную около этого треугольника окружность в точке *K*. Отрезок *BN* − диаметр этой окружности.

а) Докажите, что *AN* = *CK*.

б) Найдите *NK*, если радиус описанной около треугольника *ABC* окружности равен 16, ∠*BAC* = 40°, ∠*ACB* = 85°.

(Сб.11, 2020)

1. В остроугольном треугольнике *ABC* все стороны различны. Прямая, содержащая высоту *BH* треугольника *ABC*, вторично пересекает описанную около этого треугольника окружность в точке *K*. Отрезок *BN* − диаметр этой окружности.

а) Докажите, что *AN* = *CK*.

б) Найдите *NK*, если радиус описанной около треугольника *ABC* окружности равен 12, ∠*BAC* = 35°, ∠*ACB* = 65°.

(***ЕГЭ-2019, основная волна Центр***) Гущин

1. В остроугольном треугольнике *ABC* угол *A* равен 60°. Высоты *BN* и *CM* треугольника *ABC* пересекаются в точке *H*. Точка *O* − центр окружности, описанной около треугольника *ABC*.

а) Докажите, что *AH = AO*.

б) Найдите площадь треугольника *AHO*, если *BC* =, ∠*ABC* = 45°.

(***ЕГЭ-2019, основная волна***) Гущин

1. В треугольнике *ABC* известно, что ∠*BAC* = 60°, ∠*ABC* = 45°. Продолжения высот треугольника *ABC* пересекают описанную около него окружность в точках *М*, *N*, *Р*.

а) Докажите, что треугольник *MNP* прямоугольный.

б) Найдите площадь треугольника *MNP*, если известно, что *BC* = 12.

(Сб.12, 2019)

1. В треугольнике *ABC* известно, что ∠*BAC* = 60°, ∠*ABC* = 45°. Продолжения высот треугольника *ABC* пересекают описанную около него окружность в точках *М*, *N*, *Р*.

а) Докажите, что треугольник *MNP* прямоугольный.

б) Найдите площадь треугольника *MNP*, если известно, что *BC* = 6.

(Сб.6, 2019)

1. Пусть *AA*1, *BB*1 и *CC*1 – высоты треугольника *ABC*, *O* – центр его описанной окружности.

а) Докажите, что *OA* ⊥ *B*1*C*1.

б) Найдите площадь треугольника *ABC*, если *A*1*B*1= 21, *A*1*C*1 = 17, *B*1*C*1 = 10.

(Сб.12, 2019)

1. В треугольнике *ABC* угол *A* равен 120°. Прямые, содержащие высоты *BM* и *CN* треугольника *ABC*, пересекаются в точке *H*. Точка *O −* центр окружности, описанной около треугольника *ABC*.

а) Докажите, что *AH* = *AO*.

б) Найдите площадь треугольника *AHO*, если *BC* = , ∠*ABC* = 45°.

(***ЕГЭ-2020, досрочная волна***) Гущин

1. В треугольнике *ABC* угол *A* равен 120°. Прямые, содержащие высоты *BM* и *CN* треугольника *ABC*, пересекаются в точке *H*. Точка *O −* центр окружности, описанной около треугольника *ABC*.

а) Докажите, что *AH* = *AO*.

б) Найдите площадь треугольника *AHO*, если *BC* = 3, ∠*ABC* = 15°.

(***ЕГЭ-2020, досрочная волна***) Гущин

1. Дан треугольник *ABC*. Серединный перпендикуляр к стороне *AB* пересекается с биссектрисой угла *BAC* в точке *K*, лежащей на стороне *BC*.

а) Докажите, что *AC*2 = *BC* ⋅ *CK*.

б) Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник *AKC*, если cos *B* = 0,6, *AC* = 18, а площадь треугольника *AKC* равна 108.

(*ЕГЭ-2017, Т.Р.*)

1. Дан треугольник *ABC*. Серединный перпендикуляр к стороне *AB* пересекается с биссектрисой угла *BAC* в точке *K*, лежащей на стороне *BC*.

а) Докажите, что *AC*2 = *BC* ⋅ *CK*.

б) Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник *AKB* , если cos *B* =, *AC* = 36, а площадь треугольника *AKC* равна .

(*ЕГЭ-2017, Т.Р.*)

1. Дан треугольник *ABC*. Серединный перпендикуляр к стороне *AB* пересекается с биссектрисой угла *BAC* в точке *K*, лежащей на стороне *BC*.

а) Докажите, что *AC*2 = *BC* ⋅ *CK*.

б) Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник *AKC*, если sin *B* = 0,6 и сторона *AC* = 24.

(Сб.4, 2020)

1. Дан треугольник *ABC*. Серединный перпендикуляр к стороне *AB* пересекается с биссектрисой угла *BAC* в точке *K*, лежащей на стороне *BC*.

а) Докажите, что *AC*2 = *BC* ⋅ *CK*.

б) Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник *AKC*, если sin *B* = 0,8 и сторона *AC* = 30.

(Сб.4, 2020)

1. Дан треугольник *ABC*. Серединный перпендикуляр к стороне *AB* пересекается с биссектрисой угла *BAC* в точке *K*, лежащей на стороне *BC*.

а) Докажите, что *AC*2 = *BC* ⋅ *CK*.

б) Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник *AKC*, если sin *B* = и сторона *AC* = 18.

(Сб.1, Сб.4, 2020)

1. Дан треугольник *ABC*. Серединный перпендикуляр к стороне *AB* пересекается с биссектрисой угла *BAC* в точке *K*, лежащей на стороне *BC*.

а) Докажите, что *AC*2 = *BC* ⋅ *CK*.

б) Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник *AKC*, если sin *B* = и сторона *AC* = 36.

(Сб.4, 2020)

1. В треугольнике *ABC* с тупым углом при вершине *A* проведены высоты *BM* и *CN*.

а) Докажите, что ∠*ANM* = ∠*ACB*.

б) Найдите радиусы окружностей, описанных около треугольников *BNC* и *AMN*, если cos∠*BAC* =, а радиус окружности, описанной около треугольника *ABC*, равен 6.

(Сб.12, 2019)

1. Окружность проходит через вершины *B* и *C* треугольника *ABC* и пересекает *АВ* и *АС* в точках *C*1 и *B*1 соответственно.

а) Докажите, что треугольник *ABC* подобен треугольнику *АВ*1*С*1.

б) Найдите радиус данной окружности, если ∠*A* = 45°, *В*1*С*1 = 6 и площадь треугольника *AВ*1*С*1 в восемь раз меньше площади четырёхугольника *BСB*1*C*1.

(*ЕГЭ-2020, Т.Р.*)

1. Окружность проходит через вершины *B* и *C* треугольника *ABC* и пересекает *АВ* и *АС* в точках *C*1 и *B*1 соответственно.

а) Докажите, что треугольник *ABC* подобен треугольнику *АВ*1*С*1.

б) Найдите радиус данной окружности, если ∠*A* = 135°, *В*1*С*1 = 10 и площадь треугольника *AВ*1*С*1 в семь раз меньше площади четырёхугольника *BСB*1*C*1.

(*ЕГЭ-2020, Т.Р.*)

1. Окружность проходит через вершины *B* и *C* треугольника *ABC* и пересекает *АВ* и *АС* в точках *C*1 и *B*1 соответственно.

а) Докажите, что треугольник *ABC* подобен треугольнику *АВ*1*С*1.

б) Вычислите радиус данной окружности, если ∠*A* = 120°, *В*1*С*1 = и площадь треугольника *AВ*1*С*1 в три раза меньше площади четырёхугольника *BСB*1*C*1.

(*ЕГЭ-2020, Т.Р.*)

1. Окружность проходит через вершины *B* и *C* треугольника *ABC* и пересекает *АВ* и *АС* в точках *C*1 и *B*1 соответственно.

а) Докажите, что треугольник *ABC* подобен треугольнику *АВ*1*С*1.

б) Вычислите радиус данной окружности, если ∠*A* = 150°, *В*1*С*1 = и площадь треугольника *AВ*1*С*1 в четыре раза меньше площади четырёхугольника *BСB*1*C*1.

(*ЕГЭ-2020, Т.Р.*)

1. На стороне *BC* треугольника *ABC* как на диаметре построена окружность, пересекающая отрезок *AB* в точке *D*. При этом ∠*ABC =* ∠*ACD*.

а) Докажите, что прямая *CD* разбивает треугольник *ABC* на два подобных треугольника.

б) Найдите отношение площадей этих подобных треугольников, если известно, что *AC* = 15, *ВС*= 20.

(Сб.8, 2020, Сб.12, 2019)

1. Отрезок *CD* – биссектриса треугольника *ABC*. Окружность, проходящая через точки *C* и *D*, касается стороны *AB* и пересекает стороны *AC* и *BC* в точках *M* и *N* соответственно.

а) Докажите, что *MN* ‖ *AB*.

б) Найдите *MN*, если известно, что *AD* = 2, *BD* = 4 и *AM* = 1.

(Сб.8, 2020, Сб.12, 2019)

1. Точки *D* и *E* − середины сторон *AC* и *BC* треугольника *ABC* соответственно. На отрезке *DE* как на диаметре построена окружность, пересекающая продолжения сторон *AC* и *BC* в точках *M* и *N* соответственно.

а) Докажите, что биссектрисы углов *MEN* и *NDM* пересекаются на этой окружности.

б) Найдите *MN*, если известно, что *AB* = 14, *BC* = 10, *AC* = 6.

(Сб.8, 2020, Сб.12, 2019)

1. Окружность касается стороны *AC* остроугольного треугольника *ABC* и делит каждую из сторон *AB* и *BC* на три равные части.

а) Докажите, что *AB = BC*.

б) Найдите, в каком отношении высота этого треугольника, проведённая из вершины *A*, делит сторону *BC*.

(***ЕГЭ-2019, резервный вариант***) Гущин

1. Окружность с центром *O*, вписанная в треугольник *ABC*, касается его сторон *BC*, *AB* и *AC* в точках *K*, *L* и *M* соответственно. Прямая *KM* вторично пересекает в точке *P* окружность радиуса *AM* с центром *A*.

а) Докажите, что прямая *AP* параллельна прямой *BC*.

б) Пусть ∠*ABC* = 90° , *AM* = 3, *CM* = 2, *Q −* точка пересечения прямых *KM* и *AB*, а *T−* такая точка на отрезке *PQ*, что ∠*OAT* = 45°. Найдите *QT*.

(*ЕГЭ-2018, Т.Р.*)

1. Окружность с центром *O*, вписанная в треугольник *ABC*, касается его сторон *BC*, *AB* и *AC* в точках *K*, *L* и *M* соответственно. Прямая *KM* вторично пересекает в точке *P* окружность радиуса *AM* с центром *A*.

а) Докажите, что прямая *AP* параллельна прямой *BC*.

б) Пусть ∠*ABC* = 90° , *AM* = 6, *CM* = 4, *Q −* точка пересечения прямых *KM* и *AB*, а *T−* такая точка на отрезке *PQ*, что ∠*OAT* = 45°. Найдите *QT*.

(*ЕГЭ-2018, Т.Р.*)

1. Точка *O* − центр вписанной в треугольник *ABC* окружности. Прямая *BO* вторично пересекает описанную около этого треугольника окружность в точке *P*.

а) Докажите, что ∠*POC* = ∠*PCO*.

б) Найдите площадь треугольника *APC*, если радиус описанной около треугольника *ABC* окружности равен 8, а ∠*ABC* = 60°.

(***ЕГЭ-2019, основная волна***) Гущин

1. Точка *O* − центр вписанной в треугольник *ABC* окружности. Прямая *BO* вторично пересекает описанную около этого треугольника окружность в точке *P*.

а) Докажите, что *OP* = *CP*.

б) Найдите радиус описанной около треугольника *ABC* окружности, если расстояние от точки *P* до прямой *AC* равно 18, ∠*ABC* = 60°.

(***ЕГЭ-2019, основная волна***)

1. Точка *O* − центр вписанной в треугольник *ABC* окружности. Прямая *BO* вторично пересекает описанную около этого треугольника окружность в точке *P*.

а) Докажите, что ∠*POA* = ∠*PAO*.

б) Найдите площадь треугольника *APO*, если радиус описанной около треугольника *ABC* окружности равен 10, ∠*BAC* = 75°, ∠*ABC* = 60°.

(***ЕГЭ-2019, основная волна***)

1. Точка *O* − центр вписанной в треугольник *ABC* окружности. Прямая *BO* вторично пересекает описанную около этого треугольника окружность в точке *P*.

а) Докажите, что ∠*POC* = ∠*PCO*.

б) Найдите площадь треугольника *APC*, если радиус описанной около треугольника *ABC* окружности равен 4, а ∠*ABC* = 120°.

(***ЕГЭ-2019, основная волна***) Гущин

1. Точка *O* − центр вписанной в треугольник *ABC* окружности. Прямая *BO* вторично пересекает описанную около этого треугольника окружность в точке *P*.

а) Докажите, что *OP = AP*.

б) Найдите расстояние от точки *P* до прямой *AC*, если радиус описанной около треугольника *ABC* окружности равен 18, ∠*ABC* = 120°.

(***ЕГЭ-2019, основная волна Дальний Восток***) Гущин

1. Сторона *AC* треугольника *ABC* больше стороны *AB*. Вписанная в треугольник окружность касается стороны *BC* в точке *M*, а вневписанная – в точке *N*.

а) Докажите, что *MN* = *AC* – *AB*.

б) Найдите расстояние между центрами окружностей, если сумма их радиусов равна 24, а *MN* = 10.

(Сб.12, 2019)

1. Окружность с центром *O*, вписанная в треугольник *ABC*, касается его сторон *АВ*, *АС* и *BC* в точках *C*1, *B*1 и *A*1 соответственно. Биссектриса угла *A* пересекает эту окружность в точке *Q*, лежащей внутри треугольника *АВ*1*С*1.

а) Докажите, что *C*1*Q* − биссектриса угла *AC*1*B*1.

б) Найдите расстояние от точки *O* до центра окружности, вписанной в треугольник *АC*1*B*1, если известно, что *BC* = 15, *АВ* = 13, *АС* = 14.

(Сб.6, 2019)

1. Окружность с центром *O*, вписанная в треугольник *ABC*, касается его сторон *АВ*, *АС* и *BC* в точках *C*1, *B*1 и *A*1 соответственно. Биссектриса угла *A* пересекает эту окружность в точке *Q*, лежащей внутри треугольника *АВ*1*С*1.

а) Докажите, что *C*1*Q* − биссектриса угла *AC*1*B*1.

б) Найдите расстояние от точки *O* до центра окружности, вписанной в треугольник *АB*1*C*1, если известно, что *BC* = 7, *АВ* = 15, *АС* = 20.

(Сб.6, 2019)

1. В окружности с центром *O* проведена хорда *AB*, на которой выбрана точка *M*. Вторая окружность, описанная около треугольника *MAO*, повторно пересекает первую окружность в точке *K*.

а) Докажите, что *BM* = *MK*.

б) Найдите площадь треугольника *OMK*, если *OM* = 9 и *BK* = 10.

(*ЕГЭ-2020, Т.Р. 10кл.*)

1. В окружности с центром *O* проведена хорда *AB*, на которой выбрана точка *M*. Вторая окружность, описанная около треугольника *MAO*, повторно пересекает первую окружность в точке *K*.

а) Докажите, что *BM* = *MK*.

б) Найдите площадь треугольника *OMK*, если *OM* = 11 и *BK* = 12.

(*ЕГЭ-2020, Т.Р. 10кл.*)

1. Биссектриса угла *A* треугольника *ABC* пересекает сторону *BC* в точке *K*, а окружность, описанную около треугольника *ABC* – в точке *M*.

а) Докажите, что треугольник *BMC* − равнобедренный.

б) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника *KMC*, если *AC* = 10, *BC* = 11 и *AB* = 12.

(***ЕГЭ-2014, основная волна Сибирь***)

1. Точка *I −* центр окружности *S*1, вписанной в треугольник *ABC* , точка *O −* центр окружности *S*2, описанной около треугольника *BIC*.

а) Докажите, что точка *O* лежит на окружности, описанной около треугольника *ABC*.

б) Найдите косинус угла *BAC*, если радиус описанной окружности треугольника *ABC* относится к радиусу окружности *S*2 как 3:5.

(*ЕГЭ-2018, Т.Р.*)

1. Точка *I−* центр окружности *S*1, вписанной в треугольник *ABC* , точка *O −* центр окружности *S*2, описанной около треугольника *BIC*.

а) Докажите, что точка *O* лежит на окружности, описанной около треугольника *ABC*.

б) Найдите косинус угла *BAC*, если радиус описанной окружности треугольника *ABC* относится к радиусу окружности *S*2 как 2:3.

(*ЕГЭ-2018, Т.Р.*)

1. Точка *I −* центр окружности *S*1, вписанной в треугольник *ABC* , точка *O −* центр окружности *S*2, описанной около треугольника *BIC*.

а) Докажите, что точка *O* лежит на окружности, описанной около треугольника *ABC*.

б) Найдите косинус угла *BAC*, если радиус описанной окружности треугольника *ABC* относится к радиусу окружности *S*2 как 3:4.

(*ЕГЭ-2018, Т.Р.*)

1. Точка *I−* центр окружности *S*1, вписанной в треугольник *ABC* , точка *O −* центр окружности *S*2, описанной около треугольника *BIC*.

а) Докажите, что точка *O* лежит на окружности, описанной около треугольника *ABC*.

б) Найдите косинус угла *BAC*, если радиус описанной окружности треугольника *ABC* относится к радиусу окружности *S*2 как 4:5.

(*ЕГЭ-2018, Т.Р.*)

1. Точка *O −* центр окружности, описанной около остроугольного треугольника *ABC*, *I −* центр вписанной в него окружности, *H −* точка пересечения высот. Известно, что ∠*BAC* = ∠*OBC* + ∠*OCB*.

а) Докажите, что точка *I* лежит на окружности, описанной около треугольника *BOC*.

б) Найдите угол *OIH*, если ∠*ABC* = 55°.

(***ЕГЭ-2016, досрочная волна***) Гущин

1. Точка *O −* центр окружности, описанной около остроугольного треугольника *ABC*, *I −* центр вписанной в него окружности, *H −* точка пересечения высот. Известно, что ∠*BAC* = ∠*OBC* + ∠*OCB*.

а) Докажите, что точка *I* лежит на окружности, описанной около треугольника *BOC*.

б) Найдите угол *OIH*, если ∠*ABC* = 75°.

(***ЕГЭ-2016, досрочная волна***) Гущин

1. Две окружности касаются внешним образом в точке *K*. Прямая *AB* касается первой окружности в точке *A*, а второй − в точке *B*. Прямая *BK* пересекает первую окружность в точке *D*, прямая *AK* пересекает вторую окружность в точке *C*.

а) Докажите, что прямые *AD* и *BC* параллельны.

б) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника *BCD*, если известно, что радиус первой окружности равен 4, а радиус второй окружности равен 1.

(***ЕГЭ-2019, резервный день досрочной волны***)

1. В треугольник *ABC* помещены две касающиеся окружности с центрами *O*1 и *O*2, причём первая из них касается сторон *AB* и *AC*, а вторая – сторон *AB* и *BC*.

а) Докажите, что прямые *AO*1 и *BO*2 пересекаются в центре окружности, вписанной в треугольник *ABC*.

б) Найдите радиусы окружностей, если они равны, а *АВ* = *АС* = 10 и *BC* = 12.

(Сб.12, 2019)

1. Радиус окружности, описанной около треугольника *ABC*, равен 12, а её центр находится в точке *O*. Центрами окружностей, описанных около треугольников *AOB*, *BOC* и *COA*, являются точки *O*1, *O*2 и *O*3.

а) Докажите, что точка *O* является центром вписанной окружности треугольника *O*1*O*2*O*3.

б) Найдите радиус вписанной окружности треугольника *O*1*O*2*O*3.

(Сб.7, 2020)

1. Точки *A*1, *B*1 и *C*1 − середины сторон соответственно *BC*, *AC* и *AB* остроугольного треугольника *ABC*.

а) Докажите, что отличная от *A*1 точка пересечения окружностей, описанных около треугольников *A*1*CB*1 и *A*1*BC*1, лежит на окружности, описанной около треугольника *B*1*AC*1.

б) Известно, что *AB* = *AC* = 10 и *BC* = 12. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник, вершинами которого являются центры окружностей, описанных около треугольников *A*1*CB*1, *A*1*BC*1 и *B*1*AC*1.

(***ЕГЭ-2016, досрочная волна***) Гущин

1. Точки *A*1, *B*1 и *C*1 − середины сторон соответственно *BC*, *AC* и *AB* остроугольного треугольника *ABC*.

а) Докажите, что отличная от *A*1 точка пересечения окружностей, описанных около треугольников *A*1*CB*1 и *A*1*BC*1, лежит на окружности, описанной около треугольника *B*1*AC*1.

б) Известно, что *AB* = *AC* = 13 и *BC* = 24. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник, вершинами которого являются центры окружностей, описанных около треугольников *A*1*CB*1, *A*1*BC*1 и *B*1*AC*1.

(***ЕГЭ-2016, досрочная волна***) Гущин

***7. Четырёхугольник и окружность***

1. К окружности, вписанной в квадрат *ABCD*, проведена касательная, пересекающая стороны *АВ* и *AD* в точках *M* и *N* соответственно.

а) Докажите, что периметр треугольника *AMN* равен стороне квадрата.

б) Прямая *MN* пересекает прямую *CD* в точке *P*. В каком отношении делит сторону *BC* прямая, проходящая через точку *P* и центр окружности, если *АМ*: *МВ* = 1:3?

(***ЕГЭ-2015, досрочная волна***, Сб.12, 2019)

1. К окружности, вписанной в квадрат *ABCD*, проведена касательная, пересекающая стороны *АВ* и *AD* в точках *M* и *N* соответственно.

а) Докажите, что периметр треугольника *AMN* равен стороне квадрата.

б) Прямая *MN* пересекает прямую *CD* в точке *P*. В каком отношении делит сторону *BC* прямая, проходящая через точку *P* и центр окружности, если *АМ*: *МВ* = 1:2?

(***ЕГЭ-2015, досрочная волна***)

1. Окружность, вписанная в квадрат *ABCD*, касается его стороны *АВ* в точке *T*, а стороны *AD* в точке *Р*. Отрезки *CT* и *CP* пересекают окружность в точках *М* и *N* соответственно. Сторона квадрата равна .

а) Докажите, что прямая *TP* параллельна прямой *MN*.

б) Найдите *МР*.

(Сб.8, 2020)

1. Окружность, вписанная в квадрат *ABCD*, касается его стороны *АВ* в точке *T*, а стороны *AD* в точке *Р*. Отрезки *CT* и *CP* пересекают окружность в точках *М* и *N* соответственно. Сторона квадрата равна .

а) Докажите, что прямая *TP* параллельна прямой *MN*.

б) Найдите *МР*.

(Сб.8, 2020)

1. Квадрат *ABCD* вписан в окружность. Хорда *CE* пересекает его диагональ *BD* в точке *K*.

а) Докажите, что *CK* ⋅ *CE = AB* ⋅ *CD*.

б) Найдите отношение *CK*и *KE*, если ∠*ECD* = 15°.

(***ЕГЭ-2016, основная волна***) Гущин

1. Квадрат *ABCD* вписан в окружность. Хорда *CE* пересекает его диагональ *BD* в точке *K*.

а) Докажите, что *CK* ⋅ *CE = BC* ⋅ *AD*.

б) Найдите отношение *CE*: *KE*, если ∠*ECD* = 75°.

(***ЕГЭ-2016, основная волна***) Гущин

1. Точки *E* и *K* − соответственно середины сторон *CD* и *AD* квадрата *ABCD*. Прямая *BE* пересекается с прямой *CK* в точке *O*.

а) Докажите, что вокруг четырёхугольника *ABOK* можно описать окружность.

б) Найдите *AO*, если сторона квадрата равна 1.

(***ЕГЭ-2017, резервный вариант***) Гущин

1. На стороне *AB* и диагонали *AC* квадрата *ABCD* отмечены точки *M* и *N* соответственно, причём *АМ*: *МВ* = 1:4 и *АN*: *NC* = 3:2.

а) Докажите, что точки *A*, *M*, *N* и *D* лежат на одной окружности.

б) Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей четырёхугольника *AMND* до прямой *MN*, если сторона квадрата равна 30.

(Сб.12, 2019)

1. Сторона *CD* прямоугольника *ABCD* касается некоторой окружности в точке *M*. Продолжение стороны *AD* пересекает окружность в точках *P* и *Q*, причём точка *P* лежит между точками *D* и *Q*. Прямая *BC* касается окружности, а точка *Q* лежит на прямой *BM*.

а) Докажите, что ∠*DMP* = ∠*CBM*.

б) Известно, что *CM* = 5 и *CD* = 8. Найдите сторону *AD*.

(Сб.10, Сб.12, 2019)

1. Сторона *CD* прямоугольника *ABCD* касается некоторой окружности в точке *M*. Продолжение стороны *AD* пересекает окружность в точках *P* и *Q*, причём точка *P* лежит между точками *D* и *Q*. Прямая *BC* касается окружности, а точка *Q* лежит на прямой *BM*.

а) Докажите, что ∠*DMP* = ∠*CBM*.

б) Известно, что *CM* = 13 и *CD* = 18. Найдите сторону *AD*.

(Сб.10, 2019)

1. Окружность, вписанная в ромб *ABCD*, касается сторон *CD* и *BC* в точках *M* и *Q* соответственно. Прямые *AM* и *BC* пересекаются в точке *P*.

а) Докажите, что *BP* ⋅ *BQ* = *BC*2 .

б) Найдите угол *APC*, если *DM* = 1 и *MC* = 4.

(*ЕГЭ-2019, Т.Р. 10кл.*)

1. Окружность, вписанная в ромб *ABCD*, касается сторон *CD* и *BC* в точках *M* и *Q* соответственно. Прямые *AM* и *BC* пересекаются в точке *P*.

а) Докажите, что *BP* ⋅ *BQ* = *BC*2 .

б) Найдите угол *APC*, если *DM* = 4 и *MC* = 9.

(*ЕГЭ-2019, Т.Р. 10кл.*)

1. В параллелограмм вписана окружность.

а) Докажите, что этот параллелограмм − ромб.

б) Эта окружность, касающаяся стороны ромба, делит её на отрезки, равные 4 и 1. Найдите площадь четырёхугольника с вершинами в точках касания окружности со сторонами ромба.

(Сб.10, 2019)

1. В параллелограмм вписана окружность.

а) Докажите, что этот параллелограмм − ромб.

б) Эта окружность, касающаяся стороны ромба, делит её на отрезки, равные 5 и 1. Найдите площадь четырёхугольника с вершинами в точках касания окружности со сторонами ромба.

(Сб.10, 2019)

1. Окружность, построенная на стороне *AD* параллелограмма *ABCD* как на диаметре, проходит через точку пересечения диагоналей параллелограмма.

а) Докажите, что *ABCD* – ромб.

б) Эта окружность пересекает сторону *AB* в точке *M*, причём *AM* : *MB* = 2:1. Найдите диагональ *AC*, если известно, что *AD* =.

(Сб.8, 2020, Сб.12, 2019)

1. Окружность, построенная на стороне *AD* параллелограмма *ABCD* как на диаметре, проходит через точку пересечения диагоналей параллелограмма.

а) Докажите, что *ABCD* – ромб.

б) Эта окружность пересекает сторону *AB* в точке *M*, причём *AM* : *MB* = 1:2. Найдите диагональ *AC*, если известно, что *AD* =.

(Сб.1, Сб.3, Сб.4, 2020)

1. Окружность проходит через вершины *A*, *B* и *C* параллелограмма *ABCD*, пересекает продолжение стороны *AD* за точку *D* в точке *E* и пересекает продолжение стороны *CD* за точку *D* в точке *K*.

а) Докажите, что *BK* = *BE*.

б) Найдите отношение *KE*: *AC*, если ∠*ВAD* = 30°.

(Сб.8, 2020)

1. Окружность проходит через вершины *A*, *B* и *C* параллелограмма *ABCD*, пересекает продолжение стороны *AD* за точку *D* в точке *E* и пересекает продолжение стороны *CD* за точку *D* в точке *K*.

а) Докажите, что *BK* = *BE*.

б) Найдите отношение *KE*: *AC*, если ∠*ВAD* = 45°.

(***ЕГЭ-2018, основная волна***)

1. Окружность проходит через вершины *A*, *B* и *D* параллелограмма *ABCD*, пересекает сторону *BC* в точках *B* и *M* и пересекает продолжение стороны *CD* за точку *D* в точке *N*.

а) Докажите, что *AM* = *AN*.

б) Найдите отношение *CD* : *DN*, если *AB*: *BC* = 1:2, а cos∠*ВAD* =.

(***ЕГЭ-2018, основная волна***)

1. В прямоугольную трапецию *ABCD* с прямым углом при вершине *A* вписана окружность, касающаяся оснований BC и *AD* в точках *P* и *Q* соответственно.

а) Докажите, что диагонали трапеции делят отрезок *PQ* в одном и том же отношении  
б) Найдите большее основание трапеции *AD*, если меньшее основание *BC* = 6, и прямая *PQ* делит площадь трапеции в отношении 5:4, то есть *SABPQ* : *SDCPQ* = 5:4.

(Сб.9, 2019)

1. В прямоугольную трапецию *ABCD* с прямым углом при вершине *A* вписана окружность, касающаяся оснований *BC* и *AD* в точках *P* и *Q* соответственно.

а) Докажите, что диагонали трапеции делят отрезок *PQ* в одном и том же отношении  
б) Найдите большее основание трапеции *AD*, если меньшее основание *BC* = 8, и прямая *PQ* делит площадь трапеции в отношении 5:3, то есть *SABPQ* : *SDCPQ* = 5:3.

(Сб.9, 2019)

1. Окружность с центром *O* проходит через вершины *B* и *C* большей боковой стороны прямоугольной трапеции *ABCD* и касается боковой стороны *AD* в точке *T*.

а) Докажите, что угол *BOC* вдвое больше угла *BTC*.

б) Найдите расстояние от точки *T* до прямой *BC*, если основания трапеции *AB* и *CD* равны 4 и 9 соответственно.

(*ЕГЭ-2018, 2015, Т.Р.*)

1. Окружность с центром *O* проходит через вершины *B* и *C* большей боковой стороны прямоугольной трапеции *ABCD* и касается боковой стороны *AD* в точке *T*.

а) Докажите, что угол *BOC* вдвое больше угла *BTC*.

б) Найдите расстояние от точки *T* до прямой *BC*, если основания трапеции *AB* и *CD* равны 1 и 25 соответственно.

(*ЕГЭ-2018, 2015, Т.Р.*)

1. В трапеции *ABCD* угол *BAD* прямой. Окружность, построенная на большем основании *AD* как на диаметре, пересекает меньшее основание *BC* в точках *C* и *M*.

а) Докажите, что ∠*BAM* = ∠*CAD*.

б) Диагонали трапеции *ABCD* пересекаются в точке *O*. Найдите площадь треугольника *AOB*, если *AB*= 6, а *BC* = 4*BM*.

(***ЕГЭ-2017, основная волна***) Гущин

1. Окружность, проходящая через вершины *A*, *B* и *C* прямоугольной трапеции *ABCD* с прямыми углами при вершинах *A* и *B*, пересекает отрезки *AD* и *CD* соответственно в точках *М* и *N*, причём *AM*: *AD*= *CN*: *CD* = 1:3.

а) Докажите, что *CD* = *AD*.

б) Найдите площадь трапеции, если радиус окружности равен 3.

(Сб.12, 2019)

1. Окружность, проходящая через вершины *A*, *C* и *D* прямоугольной трапеции *ABCD* с основаниями *AD* и *BC*, пересекает меньшую боковую сторону *AB* в точке *P* и касается прямой *BC*. Известно, что *AD* = *CD*.

а) Докажите, что *CP −* биссектриса угла *ACB* .

б) В каком отношении прямая *DP* делит площадь трапеции?

(*ЕГЭ-2016, Т.Р.*)

1. Одна окружность вписана в прямоугольную трапецию, а вторая касается большей боковой стороны и продолжений оснований.

а) Докажите, что расстояние между центрами окружностей равно большей боковой стороне трапеции.

б) Найдите расстояние от вершины одного из прямых углов трапеции до центра второй окружности, если точка касания первой окружности с большей боковой стороной трапеции делит её на отрезки, равные 2 и 8.

(Сб.10, 2019)

1. Одна окружность вписана в прямоугольную трапецию, а вторая касается большей боковой стороны и продолжений оснований.

а) Докажите, что расстояние между центрами окружностей равно большей боковой стороне трапеции.

б) Найдите расстояние от вершины одного из прямых углов трапеции до центра второй окружности, если точка касания первой окружности с большей боковой стороной трапеции делит её на отрезки, равные 2 и 50.

(***ЕГЭ-2014, основная волна Сибирь***)

1. Одна окружность вписана в прямоугольную трапецию, а вторая касается большей боковой стороны и продолжений оснований.

а) Докажите, что расстояние между центрами окружностей равно большей боковой стороне трапеции.

б) Найдите расстояние от вершины одного из прямых углов трапеции до центра второй окружности, если точка касания первой окружности с большей боковой стороной трапеции делит её на отрезки, равные 2 и 18.

(***ЕГЭ-2014, основная волна Сибирь***)

1. Окружность с центром *O*1 вписана в прямоугольную трапецию *ABCD* с прямым углом при вершине *A*. Окружность с центром *O*2 касается большей боковой стороны *CD* и продолжений оснований трапеции.

а) Докажите, что *O*1*CO*2*D* – прямоугольник.

б) Найдите площадь этого прямоугольника, если точка касания *M* вписанной в трапецию окружности делит меньшее основание на отрезки *BM* = 6 и *CM* = 4.

(Сб.12, 2019)

1. Окружность с центром *O* вписана в равнобедренную трапецию *ABCD* с боковой стороной *AB*.

а) Докажите, что треугольник *AOB* прямоугольный.

б) Найдите площадь трапеции, если известно, что радиус окружности равен 2, а точка касания делит боковую сторону трапеции в отношении 1:4.

(Сб.8, 2020, Сб.12, 2019)

1. Около окружности описана равнобедренная трапеция *ABCD*; *E* и *K* – точки касания этой окружности с боковыми сторонами *AD* и *BC* соответственно.

а) Докажите, что *EK* ‖ *AB*.

б) Найдите площадь трапеции *ABKE*, если радиус окружности равен *R*, а ∠*BAD* = 60°.

(Сб.12, 2019)

1. Окружность с центром *O*вписана в равнобедренную трапецию *ABCD* с основаниями *AD* > *BC*.

а) Докажите, что прямая *BO* делит площадь трапеции пополам.

б) Пусть *M* и *N* – точки касания окружности с боковыми сторонами трапеции. В каком отношении прямая *MN* делит площадь трапеции, если *AD* = 2*BC*?

(Сб.12, 2019)

1. Около окружности описана равнобедренная трапеция.

а) Докажите, что её диагональ проходит через середину отрезка, концы которого – точки касания окружности с боковыми сторонами трапеции.

б) Найдите отношение оснований трапеции, если площадь четырёхугольника с вершинами в точках касания окружности со сторонами трапеции составляет  площади трапеции.

(Сб.12, 2019)

1. В равнобедренную трапецию *ABCD* с основаниями *AD* и *BC* вписана окружность, *CH* – высота трапеции.

а) Докажите, что центр окружности, вписанной в трапецию, лежит на отрезке *BH*.

б) Найдите диагональ *AC*, если известно, что средняя линия трапеции равна, а ∠*AOD* = 120°, где *O* – центр окружности, вписанной в трапецию, а *AD* – большее основание.

(Сб.5, 2018, Сб.12, 2019)

1. В равнобедренную трапецию *ABCD* с основаниями *AD* и *BC* вписана окружность, *CH* – высота трапеции.

а) Докажите, что центр окружности, вписанной в трапецию, лежит на отрезке *BH*.

б) Найдите диагональ *AC*, если известно, что средняя линия трапеции равна, а ∠*AOD* = 150°, где *O* – центр окружности, вписанной в трапецию, а *AD* – большее основание.

(Сб.5, 2018)

1. В равнобедренную трапецию *ABCD* с основаниями *AD* и *BC* вписана окружность, *CH* – высота трапеции.

а) Докажите, что центр окружности, вписанной в трапецию, лежит на отрезке *BH*.

б) Найдите диагональ *AC*, если известно, что средняя линия трапеции равна, а ∠*AOD* = 135°, где *O* – центр окружности, вписанной в трапецию, а *AD* – большее основание.

(Сб.5, 2018)

1. Окружность, вписанная в равнобедренную трапецию *ABCD*, касается боковых сторон *AB* и *CD* в точках *M* и *N* соответственно. Отрезок *AN* пересекает окружность в точке *K*, а луч *MK* пересекает основание *AD* в точке *L*.

а) Докажите, что треугольник *AKL* подобен треугольнику *MAL*.

б) Найдите отношение *AL* : *LD*.

(Сб.12, 2019)

1. Четырёхугольник *ABCD* вписан в окружность радиуса *R* = 8. Известно, что *AB = BC = CD* = 12.

а) Докажите, что прямые *BC* и *AD* параллельны.

б) Найдите *AD.*

(***ЕГЭ-2018, основная волна Центр***) Гущин

1. Четырёхугольник *ABCD* вписан в окружность радиуса *R* = 10. Известно, что *AB = BC = CD* = 6.

а) Докажите, что прямые *BC* и *AD* параллельны.

б) Найдите *AD.*

(***ЕГЭ-2018, основная волна Центр***) Гущин

1. Трапеция с основаниями 1 и 3 такова, что в неё можно вписать окружность и около неё можно описать окружность.

а) Докажите, что центр описанной около трапеции окружности расположен внутри трапеции.

б) Найдите площадь круга, описанного около трапеции*.*

(Сб.12, 2019)

1. Дана трапеция, в которую можно вписать окружность и около которой можно описать окружность.

а) Докажите, что проекция диагонали этой трапеции на большее основание равна боковой стороне.

б) Найдите расстояние между центрами вписанной и описанной окружностей, если основания трапеции равны 3 и 27*.*

(Сб.12, 2019)

1. Дана равнобедренная трапеция *ABCD* с основаниями *AD* и *BC*. Окружность с центром *O*, построенная на боковой стороне *AB* как на диаметре, касается боковой стороны *CD* и второй раз пересекает большее основание *AD* в точке *H*, точка *Q −* середина *CD*.

а) Докажите, что четырёхугольник *DQOH −* параллелограмм.

б) Найдите *AD*, если ∠*BAD* = 60° и *BC* = 2.

(***ЕГЭ-2015, досрочная волна***) Гущин

1. Дана равнобедренная трапеция *ABCD* с основаниями *AD* и *BC*. Окружность с центром *O*, построенная на боковой стороне *AB* как на диаметре, касается боковой стороны *CD* и второй раз пересекает большее основание *AD* в точке *H*, точка *Q −* середина *CD*.

а) Докажите, что четырёхугольник *DQOH −* параллелограмм.

б) Найдите *AD*, если ∠*BAD* = 75° и *BC* = 1.

(***ЕГЭ-2015, досрочная волна***, Сб.9, 2019)

Дана равнобедренная трапеция *KLMN* с основаниями *KN* и *LM*. Окружность с центром *O*, построенная на боковой стороне *KL* как на диаметре, касается боковой стороны *MN* и второй раз пересекает большее основание *KN* в точке *H*, точка *Q −* середина *MN* .

а) Докажите, что четырёхугольник *NQOH −* параллелограмм.

б) Найдите *KN*, если ∠*LKN* = 75° и *LM* = 1.

(*ЕГЭ-2016, Т.Р.*)

1. Дана равнобедренная трапеция *KLMN* с основаниями *KN* и *LM*. Окружность с центром *O*, построенная на боковой стороне *KL* как на диаметре, касается боковой стороны *MN* и второй раз пересекает большее основание *KN* в точке *H*, точка *Q −* середина *MN* .

а) Докажите, что четырёхугольник *NQOH −* параллелограмм.

б) Найдите *KN*, если ∠*LKN* = 75° и *LM* = 2.

(*ЕГЭ-2016, Т.Р.*)

1. Отрезок, соединяющий середины *M* и *N* оснований *BC* и *AD* соответственно трапеции *ABCD*, разбивает её на две трапеции, в каждую из которых можно вписать окружность.

а) Докажите, что трапеция *ABCD* равнобедренная.

б) Известно, что радиус этих окружностей равен 2, а меньшее основание *BC* исходной трапеции равно 6. Найдите радиус окружности, касающейся боковой стороны *AB*, основания *AN* трапеции *ABMN* и вписанной в неё окружности.

(Сб.6, 2019)

1. Отрезок, соединяющий середины *M* и *N* оснований *BC* и *AD* соответственно трапеции *ABCD*, разбивает её на две трапеции, в каждую из которых можно вписать окружность.

а) Докажите, что трапеция *ABCD* равнобедренная.

б) Известно, что радиус этих окружностей равен 3, а меньшее основание *BC* исходной трапеции равно 8. Найдите радиус окружности, касающейся боковой стороны *AB*, основания *AN* трапеции *ABMN* и вписанной в неё окружности.

(Сб.3, Сб.4, 2020)

1. В трапецию *ABCD* с основаниями *AD* и *BC* вписана окружность с центром *O*.

а) Докажите, что sin∠*AOD* = sin∠*BOC*.

б) Найдите площадь трапеции, если ∠*BAD* = 90°, а основания равны 5 и 7.

(***ЕГЭ-2015, основная волна***, ***ЕГЭ-2017, резервный вариант***) Гущин

1. Окружность, вписанная в трапецию *ABCD*, касается ее боковых сторон *AB* и *CD* в точках *M* и *N* соответственно. Известно, что *AM* = 8*MB* и *DN* = 2*CN*.

а) Докажите, что *AD* = 4*BC*.

б) Найдите длину отрезка *MN*, если радиус окружности равен .

(***ЕГЭ-2017, резервный день основной волны***) Гущин

1. Окружность, вписанная в трапецию *ABCD*, касается ее боковых сторон *AB* и *CD* в точках *M* и *N* соответственно. Известно, что *AM* = 6*MB* и 2*DN* = 3*CN*.

а) Докажите, что *AD* = 3*BC*.

б) Найдите длину отрезка *MN*, если радиус окружности равен .

(***ЕГЭ-2017, резервный день основной волны***) Гущин

1. В окружность вписан четырёхугольник с тремя равными сторонами.

а) Докажите, что в этом четырёхугольнике есть параллельные стороны.

б) Найдите диагонали четырёхугольника, если радиус окружности равен 25, а каждая из трёх равных сторон четырёхугольника равна 30.

(Сб.12, 2019)

1. Окружность, проходящая через вершины *A*, *B* и *C* трапеции *ABCD* с основаниями *AD* и *BC*, вторично пересекает прямую *AD* в точке *M*.

а) Докажите, что *AC* = *BM*.

б) Найдите *AC*, если *AD* = 16, *CD* = и ∠*AMB* = 60°.

(Сб.12, 2019)

1. Окружность с центром в точке *O* высекает на каждой из сторон трапеции *ABCD* равные хорды.

а) Докажите, что биссектрисы всех углов трапеции пересекаются в одной точке.

б) Найдите высоту трапеции, если окружность пересекает боковую сторону *АВ* в точках *K* и *L* так, что *AK* = 5, *KL* = 6, *LB* = 5.

(***ЕГЭ-2018, основная волна***)

1. Окружность с центром в точке *O* пересекает каждую из сторон трапеции *ABCD* в двух точках. Четыре получившиеся хорды окружности равны.

а) Докажите, что биссектрисы всех углов трапеции пересекаются в одной точке.

б) Найдите высоту трапеции, если окружность пересекает боковую сторону *АВ* в точках *K* и *L* так, что *AK* = 13, *KL* = 6, *LB* = 1.

(Сб.6, 2019)

1. Окружность с центром в точке *O* пересекает каждую из сторон трапеции *ABCD* в двух точках. Четыре получившиеся хорды окружности равны.

а) Докажите, что биссектрисы всех углов трапеции пересекаются в одной точке.

б) Найдите высоту трапеции, если окружность пересекает боковую сторону *АВ* в точках *K* и *L* так, что *AK* = 19, *KL* = 12, *LB* = 3.

(Сб.6, 2019)

1. Дана трапеция *ABCD* с основаниями *AD* и *BC*. Точки *M* и *N −* середины сторон *AB* и *CD* соответственно. Окружность проходит через точки *B* и *C* и пересекает отрезки *BM* и *CN* в точках *P* и *Q*, отличных от концов отрезка, соответственно.

а) Докажите, что точки *M*, *N*, *P* и *Q* лежат на одной окружности.

б) Найдите *QN*, если отрезки *DP* и *PC* перпендикулярны, *AB* = 26, *BC* = 4,5, *CD* = 25, *AD* = 21,5.

(***ЕГЭ-2019, досрочная волна***) Гущин

1. Дана трапеция *ABCD* с основаниями *AD* и *BC*. Точки *M* и *N −* середины сторон *AB* и *CD* соответственно. Окружность проходит через точки *B* и *C* и пересекает отрезки *BM* и *CN* в точках *P* и *Q*, отличных от концов отрезка, соответственно.

а) Докажите, что точки *M*, *N*, *P* и *Q* лежат на одной окружности.

б) Найдите *QN*, если отрезки *DP* и *PC* перпендикулярны, *AB* = 21, *BC* = 4, *CD* = 20, *AD* = 17.

(***ЕГЭ-2019, досрочная волна***) Гущин

1. Дана трапеция *ABCD* с основаниями *AD* и *BC*. Точки *M* и *N −* середины сторон *AB* и *CD* соответственно. Окружность проходит через точки *B* и *C* и пересекает отрезки *BM* и *CN* в точках *P* и *Q*, отличных от концов отрезка, соответственно.

а) Докажите, что точки *M*, *N*, *P* и *Q* лежат на одной окружности.

б) Найдите *PM*, если отрезки *AQ* и *BQ* перпендикулярны, *AB* = 15, *BC* = 1, *CD* = 17, *AD* = 9.

(***ЕГЭ-2019, досрочная волна***) Гущин

1. Дана трапеция *ABCD* с основаниями *AD* и *BC*. Точки *M* и *N −* середины сторон *AB* и *CD* соответственно. Окружность проходит через точки *B* и *C* и пересекает отрезки *BM* и *CN* в точках *P* и *Q*, отличных от концов отрезка, соответственно.

а) Докажите, что точки *M*, *N*, *P* и *Q* лежат на одной окружности.

б) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника *MPQ*, если прямая *DP* перпендикулярна прямой *PC*, *AB* = 25, *BC* = 3, *CD* = 28, *AD* = 20.

(***ЕГЭ-2019, досрочная волна***) Гущин

1. Окружность с центром *O*1 касается оснований *BC* и *AD* и боковой стороны *АВ* трапеции *ABCD*. Окружность с центром *O*2 касается сторон *BC*, *CD* и *AD*. Известно, что *АВ* = 9, *BC* = 8, *CD* = 4, *AD* = 15.

а) Докажите, что прямая *О*1*О*2 параллельна основаниям трапеции *ABCD*.

б) Найдите *О*1*О*2.

(Сб.6, 2019)

1. Окружность с центром *O*1 касается оснований *BC* и *AD* и боковой стороны *АВ* трапеции *ABCD*. Окружность с центром *O*2 касается сторон *BC*, *CD* и *AD*. Известно, что *АВ* = 10, *BC* = 8, *CD* = 20, *AD* = 28.

а) Докажите, что прямая *О*1*О*2 параллельна основаниям трапеции *ABCD*.

б) Найдите *О*1*О*2.

(***ЕГЭ-2018, основная волна Центр***)

1. Окружность с центром *O*1 касается оснований *BC* и *AD* и боковой стороны *АВ* трапеции *ABCD*. Окружность с центром *O*2 касается сторон *BC*, *CD* и *AD*. Известно, что *АВ* = 10, *BC* = 9, *CD* = 30, *AD* = 39.

а) Докажите, что прямая *О*1*О*2 параллельна основаниям трапеции *ABCD*.

б) Найдите *О*1*О*2.

(***ЕГЭ-2018, основная волна Центр***) Гущин

1. В окружность вписаны две трапеции. Основание и боковые стороны одной из них соответственно параллельны основаниям и боковым сторонам другой.

а) Докажите, что диагонали одной трапеции равны диагоналям другой.

б) Найдите отношение площадей этих трапеций, если известно, что боковая сторона одной из них равна радиусу окружности, а боковая сторона другой в два раза меньше.

(Сб.12, 2019)

1. Диагонали *AC* и *BD* выпуклого четырёхугольника *ABCD* перпендикулярны.

а) Докажите, что *AB*2 + *CD*2 = *BC*2 + *AD*2.

б) Известно, что в этот четырёхугольник можно вписать окружность. Найдите её радиус, если *BC* = 8, *CD* = 12, ∠*BAD* = 150°.

(Сб.12, 2019)

1. Длины сторон *AB*, *AD*, *BC* и *CD* выпуклого четырёхугольника *ABCD* в указанном порядке образуют арифметическую прогрессию.

а) Докажите, что в этот четырёхугольник можно вписать окружность.

б) Найдите радиус этой окружности, если *AB* = 6, *AD* = 8, *BC* = 10, *CD* = 12 и *BD* = *BC*.

(Сб.12, 2019)

1. Четырёхугольник *ABCD* с перпендикулярными диагоналями *AC* и *BD* вписан в окружность.

а) Докажите, что прямая, проходящая через точку пересечения диагоналей четырёхугольника перпендикулярно стороне *BC*, делит пополам сторону *AD*.

б) Найдите стороны четырёхугольника *ABCD*, если известно, что *AC* = 84, *BD* = 77, а диаметр окружности равен 85.

(Сб.12, 2019)

1. Четырёхугольник *ABCD* вписан в окружность. Диаметр *CC*1 перпендикулярен стороне *AD* и пересекает её точке *M*, а диаметр *DD*1 перпендикулярен стороне *AB* и пересекает её в точке *N*.

а) Пусть *AA*1 также диаметр окружности. Докажите, что ∠*DNM* = ∠*BA*1*D*1.

б) Найдите углы четырёхугольника *ABCD*, если угол *CDB* вдвое меньше угла *ADB*.

(*ЕГЭ-2018, Т.Р.*)

1. Четырёхугольник *ABCD* вписан в окружность. Диаметр *CC*1 перпендикулярен стороне *AD* и пересекает её точке *M*, а диаметр *DD*1 перпендикулярен стороне *AB* и пересекает её в точке *N*.

а) Пусть *AA*1 также диаметр окружности. Докажите, что ∠*DNM* = ∠*BA*1*D*1.

б) Найдите углы четырёхугольника *ABCD*, если ∠*CDB*: ∠*ADB* = 3:8.

(*ЕГЭ-2018, Т.Р.*)

1. Четырёхугольник *ABCD* вписан в окружность с центром *O*. Диагонали четырёхугольника перпендикулярны, пересекаются в точке *P*, отличной от *O*, и не проходят через точку *O*. Точки *M* и *N* − середины диагоналей *AC* и *BD* соответственно.

а) Докажите, что прямая *OP* проходит через середину отрезка *MN*.

б) Найдите площадь четырёхугольника *OMPN*, если *AC = BD*, а *MN* = 10.

(Сб.8, 2020, Сб.12, 2019)

1. Четырёхугольник *ABCD* вписан в окружность, причём сторона *CD* − диаметр этой окружности. Продолжение перпендикуляра *AH* к диагонали *BD* пересекает сторону *CD* в точке *E*, а окружность − в точке *F*, причем *H* − середина *AE*.

а) Докажите, что четырёхугольник *BCFE* − параллелограмм.

б) Найдите площадь четырёхугольника *ABCD*, если известно, что *AB* = 5 и *AH* = 4.

(Сб.6, 2018)

1. Четырёхугольник *ABCD* вписан в окружность, причём сторона *CD* − диаметр этой окружности. Продолжение перпендикуляра *AH* к диагонали *BD* пересекает сторону *CD* в точке *E*, а окружность − в точке *F*, причем *H* − середина *AE*.

а) Докажите, что четырёхугольник *BCFE* − параллелограмм.

б) Найдите площадь четырёхугольника *ABCD*, если известно, что *AB* = 6 и *AH* =.

(Сб.6, 2019)

1. В четырехугольник *ABCD* вписана окружность **ω** с центром в точке *O*. Известно, что ∠*ABC*= ∠*BCD*= 120°.

а) Докажите, что ∠*AOD* = 120°.

б) Найдите площадь круга, ограниченного окружностью **ω**, если *AB* = 3, *CD* = 2.

(***ЕГЭ-2018, резервный день основной волны***)

1. Четырехугольник *ABCD* вписан в окружность. Точка *X* лежит на его стороне *AD*, причём *BX* ‖ *CD* и *CX* ‖ *BA*.

а) Докажите, что прямые *BX* и *CX* разбивают четырёхугольник *ABCD* на три подобных треугольника.

б) Найдите *BC*, если *AX* = и *DX* = 6.

(Сб.12, 2019)

1. В выпуклом четырёхугольнике *ABCD* известны длины сторон и диагональ: *AB* = 3, *BC* = *CD* = 5, *AD* = 8, *AC* = 7.

а) Докажите, что около этого четырёхугольника можно описать окружность.

б) Найдите *BD*.

(***ЕГЭ-2018, резервный день досрочной волны Запад***) Гущин

Дан выпуклый четырёхугольник *ABCD* со сторонами *AB* = 3, *BC* = *CD* = 5, *AD* = 8 и диагональю *AC*= 7.

а) Докажите, что около него можно описать окружность.

б) Найдите диагональ *BD*.

(Сб.8, 2020, Сб.12, 2019, Сб.5, 2018)

1. В выпуклом четырёхугольнике *ABCD* известны длины сторон и диагональ: *AB* = 7, *BC* = *CD* = 8, *AD* = 15, *AC* = 13.

а) Докажите, что около этого четырёхугольника можно описать окружность.

б) Найдите *BD*.

(***ЕГЭ-2018, резервный день досрочной волны Запад***)

1. В выпуклом четырёхугольнике *ABCD* известно, что *AB* = 1, *BC* = 7, *CD* = *AD* = 5 и *AC* =.

а) Докажите, что около четырёхугольника *ABCD* можно описать окружность.

б) Найдите угол между его диагоналями.

(*ЕГЭ-2014, П.Р. ФЦТ ФИПИ*)

1. В выпуклом четырёхугольнике *ABCD* известно, что *AB* = 7, *BC* = 24, *CD* = 15, *AD* = 20 и *AC* = 25.

а) Докажите, что около четырёхугольника *ABCD* можно описать окружность.

б) Найдите угол между его диагоналями.

(*ЕГЭ-2014, П.Р. ФЦТ ФИПИ*)

1. Дан выпуклый четырёхугольник *ABCD*. Известно, что cos∠*ABC* = –cos∠*ADC*.

а) Докажите, что этот четырёхугольник вписанный.

б) Найдите радиус окружности, описанной около четырёхугольника, если ∠*ACB* = 30°, *BC* = 6, а высоты треугольников *ABD* и *CBD*, проведённые из вершины *B*, равны.

(Сб.12, 2019)

1. Диагонали вписанного в окружность четырёхугольника *ABCD* пересекаются в точке *M*, а *AB* = *BC*.

а) Докажите, что треугольник *BMC* подобен треугольнику *BCD*.

б) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника *BCM*, если радиус исходной окружности равен *R*, *AB* = *BC* = *a*, *BD* = *m*.

(Сб.12, 2019)

1. Две окружности пересекаются в точках *A* и *B*. Через точку *B* проведена прямая, пересекающая окружности в точках *C* и *D*, лежащих по разные стороны от прямой *AB*. Касательные к этим окружностям в точках *C* и *D* пересекаются в точке *E*.

а) Докажите, что четырёхугольник *ACED* вписанный.

б) Найдите *AE*, если *AB* = 10, *AC* = 16, *AD* = 15.

(Сб.12, 2019)

***8. Треугольник, четырёхугольник и окружность***

1. В прямоугольном треугольнике *ABC* с гипотенузой *AB* проведены медианы *AM* и *BN*. Известно, что около четырёхугольника *ABMN* можно описать окружность.

а) Докажите, что треугольник *ABC* равнобедренный.

б) Найдите радиус окружности, описанной около четырёхугольника *ABMN*, если также известно, что *AB* =.

(Сб.8, 2020, Сб.12, 2019)

1. В прямоугольный треугольник вписан квадрат так, что две его вершины лежат на гипотенузе, а две другие – на катетах.

а) Докажите, что центр квадрата лежит на биссектрисе прямого угла треугольника.

б) Радиус окружности, описанной около треугольника, относится к стороне квадрата как 13:6. Найдите углы треугольника.

(Сб.12, 2019)

1. На гипотенузу *AB* прямоугольного треугольника *ABC* опустили высоту *CH*. Из точки *H* на катеты опустили перпендикуляры *HK* и *HE*.

а) Докажите, что точки *A*, *B*, *K* и *E* лежат на одной окружности.

б) Найдите радиус этой окружности, если *AB* = 12, *CH* = 5.

(*ЕГЭ-2014, Д.Р.*, Сб.10, 2019)

1. На гипотенузу *AB* прямоугольного треугольника *ABC* опустили высоту *CH*. Из точки *H* на катеты опустили перпендикуляры *HK* и *HE*.

а) Докажите, что точки *A*, *B*, *K* и *E* лежат на одной окружности.

б) Найдите радиус этой окружности, если *AB* = 24, *CH* = 7.

(*ЕГЭ-2014, Д.Р.*, Сб.10, 2019)

1. В треугольнике *ABC* проведены биссектрисы *BM* и *CN*. Оказалось, что точки *B*, *C*, *M* и *N* лежат на одной окружности.

а) Докажите, что треугольник *ABC* равнобедренный.

б) Пусть *P −* точка пересечения биссектрис треугольника *ABC* . Найдите площадь четырёхугольника *AMPN*, если *MN*: *BC* = 2:5, а *BN* = 14 .

(*ЕГЭ-2020, Т.Р.*)

1. В треугольнике *ABC* проведены биссектрисы *BM* и *CN*. Оказалось, что точки *B*, *C*, *M* и *N* лежат на одной окружности.

а) Докажите, что треугольник *ABC* равнобедренный.

б) Пусть *P −* точка пересечения биссектрис треугольника *ABC* . Найдите площадь четырёхугольника *AMPN*, если *MN*: *BC* = 2:5, а *BN* = 21 .

(*ЕГЭ-2020, Т.Р.*)

1. В остроугольном треугольнике *ABC* проведены высота *CC*1 и медиана *AA*1, причём точки *A*, *C*, *A*1, *C*1 лежат на одной окружности.

а) Докажите, что треугольник *ABC* равнобедренный.

б) Найдите площадь треугольника *ABC*, если *AA*1 : *CC*1 = 3:2 и *A*1*C*1= 2.

(***ЕГЭ-2020, основная волна Центр***)

1. В остроугольном треугольнике *ABC* проведены высота *CC*1 и медиана *AA*1, причём точки *A*, *C*, *A*1, *C*1 лежат на одной окружности.

а) Докажите, что треугольник *ABC* равнобедренный.

б) Найдите площадь треугольника *ABC*, если *AA*1 : *CC*1 = 4:3 и *A*1*C*1= 6.

(***ЕГЭ-2020, основная волна Центр***) Гущин

1. В остроугольном треугольнике *ABC* проведены высота *CC*1 и медиана *AA*1, причём точки *A*, *C*, *A*1, *C*1 лежат на одной окружности.

а) Докажите, что треугольник *ABC* равнобедренный.

б) Найдите площадь треугольника *ABC*, если *AA*1 : *CC*1 = 5:4 и *A*1*C*1= 4.

(***ЕГЭ-2020, основная волна Центр***) Гущин

1. Из вершины *C* тупого угла треугольника *ABC* проведена высота *CH*. Точку *H* соединили с серединами *M* и *N* сторон *AC* и *BC*.

а) Докажите, что в четырёхугольник *CMHN* можно вписать окружность.

б) Найдите её радиус, если сумма сторон *AC* и *BC* равна 20, а площадь треугольника *ABC* равна 24.

(Сб.8, 2020, Сб.12, 2019)

1. В треугольнике *ABC* точки *A*1, *B*1 и *C*1 − середины сторон *BC*, *AC* и *AB* соответственно, *AH* − высота, ∠*BAC* = 60°, ∠*BCA* = 45°.

а) Докажите, что *A*1, *B*1, *C*1 и *H* лежат на одной окружности.

б) Найдите *A*1*H*, если *BC* =.

(***ЕГЭ-2017, досрочная волна Запад***) Гущин

1. В остроугольном треугольнике *ABC* проведены высоты *AD* и *CE*, *H* – точка пересечения высот.

а) Докажите, что точки *B*, *D*, *H* и *E* лежат на одной окружности.

б) Известно, что радиус этой окружности равен  и *AC* = 2. Найдите угол между высотой *CE* и стороной *BC*.

(Сб.8, 2020, Сб.12, 2019)

1. Точки *M* и *N* – середины сторон *AB* и *AC* треугольника *ABC*. Прямая, проходящая через вершину *A*, пересекает отрезки *M* *N* и *BC* в точках *K* и *L* соответственно, причём в четырёхугольник *BMKL* можно вписать окружность.

а) Докажите, что периметр треугольника *AMK* вдвое больше отрезка *BL*.

б) Найдите *AL*, если *AB* = 12, *BC* = 16, *AC* = 20.

(Сб.12, 2019)

1. Окружность с центром *O*, вписанная в треугольник *ABC*, касается сторон *ABC* и *ABC* в точках *P* и *Q* соответственно.

а) Докажите, что в четырёхугольник *BPOQ* можно вписать окружность.

б) Найдите угол *ABC*, если известно, что радиус этой окружности вдвое меньше радиуса вписанной окружности треугольника *ABC*.

(Сб.8, 2020, Сб.12, 2019)

1. В треугольник *ABC*, в котором длина стороны *AC* меньше длины стороны *BC*, вписана окружность с центром *O*. Точка *B*1 симметрична точке *B* относительно прямой *CO*.

а) Докажите, что *A*, *B*, *O* и *B*1 лежат на одной окружности.

б) Найдите площадь четырёхугольника *AOBB*1, если *AB* = 10, *AC* = 6 и *BC* = 8.

(***ЕГЭ-2017, резервный день основной волны***) Гущин

1. Около остроугольного треугольника *ABC* описана окружность с центром *O*. На продолжении отрезка *AO* за точку *O* отмечена точка *K* так, что ∠*BAC* + ∠*AKC* = 90°.

а) Докажите, что четырёхугольник *OBKC* вписанный.

б) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника *KBC*, если известно, что радиус окружности, описанной около треугольника *ABC* равен 12, а cos∠*BAC* = 0,6.

(***ЕГЭ-2014, досрочная волна***) Гущин

1. Около остроугольного треугольника *ABC* описана окружность с центром *O*. На продолжении отрезка *AO* за точку *O* отмечена точка *K* так, что ∠*BAC* + ∠*AKC* = 90°.

а) Докажите, что четырёхугольник *OBKC* вписанный.

б) Найдите радиус окружности, описанной около четырёхугольника *OBKC*, если cos∠*BAC* =, а *BC*= 48.

(***ЕГЭ-2014, досрочная волна***, Сб.10, 2019) Гущин

1. Около остроугольного треугольника *ABC* описана окружность с центром *O*. На продолжении *AO* за точку *O* отмечена точка *K* так, что ∠*BAC* + ∠*AKC* = 90°.

а) Докажите, что четырёхугольник *OBKC* вписанный.

б) Найдите радиус окружности, описанной около четырёхугольника *OBKC*, если cos∠*BAC* =, а  *BC*= 96.

(***ЕГЭ-2014, досрочная волна***, Сб.10, 2019)

1. Окружность с центром *O*, вписанная в треугольник *ABC*, касается стороны *BC* в точке *M*. Окружность с центром *O*1 касается стороны *BC* в точке *N*, а также касается продолжений сторон *AC* и *AB*.

а) Докажите, что около четырёхугольника *BOCO*1 можно описать окружность.

б) Найдите площади четырёхугольников *BOCO*1 и *NOMO*1, если *AC* = 6, *BC* = 8, *AB* = 10.

(Сб.12, 2019)

1. Биссектриса угла *ADC* параллелограмма *ABCD* пересекает прямую *AB* в точке *E*. В треугольник *ADE* вписана окружность, касающаяся стороны *AE* в точке *K* и стороны *AD* в точке *T*.

а) Докажите, что прямые *KT* и *DE* параллельны.

б) Найдите угол *BAD*, если известно, что *AD* = 6 и *KT* = 3.

(*ЕГЭ-2014, Т.Р.*, Сб.8, 2020, Сб.10, Сб.12, 2019)

1. Биссектриса угла *ADC* параллелограмма *ABCD* пересекает прямую *AB* в точке *E*. В треугольник *ADE* вписана окружность, касающаяся стороны *AE* в точке *K* и стороны *AD* в точке *T*.

а) Докажите, что прямые *KT* и *DE* параллельны.

б) Найдите угол *BAD*, если известно, что *AD* = 8 и *KT* = 4.

(*ЕГЭ-2014, Т.Р.*, Сб.10, 2019)

1. Дан параллелограмм *ABCD*. Прямая *CD* касается окружности, описанной около треугольника *ABD*.

а) Докажите, что диагональ *BD* равна одной из сторон параллелограмма.

б) Найдите площадь параллелограмма *ABCD*, если известно, что *BD* = 2 и ∠*BCD* = 45°.

(Сб.8, 2020, Сб.12, 2019)

1. Дан параллелограмм *ABCD*. Окружности, вписанные в треугольники *ABD* и *BCD*, касаются диагонали *BD* в точках *M* и *N* соответственно. Окружности, вписанные в треугольники *ABC* и *ADC*, касаются диагонали *AC* в точках *K* и *L* соответственно.

а) Докажите, что *MKNL* – прямоугольник.

б) Найдите его площадь, если известно, что *BC* – *AB* = 4, а угол меду диагоналями параллелограмма равен 30°.

(Сб.12, 2019)

1. В параллелограмме *ABCD* с углом *A*, равным 60°, проведена биссектриса угла *B*, пересекающая сторону *CD* в точке *M*.

а) Докажите, что треугольник *BCM* равносторонний.

б) В треугольник *BCM* вписана окружность радиуса . Другая окружность вписана в трапецию *ABMD.* Найдите расстояние между центрами этих окружностей.

(Сб.12, 2019)

1. Стороны *KN* и *LM* трапеции *KLMN* параллельны, прямые *LM* и *MN−* касательные к окружности, описанной около треугольника *KLN* .

а) Докажите, что треугольники *LMN* и *KLN* подобны.

б) Найдите площадь треугольника *KLN*, если известно, что *KN* = 3, а ∠*LMN* =120°.

(*ЕГЭ-2016, Т.Р.*)

1. Стороны *KN* и *LM* трапеции *KLMN* параллельны, прямые *LM* и *MN−* касательные к окружности, описанной около треугольника *KLN* .

а) Докажите, что треугольники *LMN* и *KLN* подобны.

б) Найдите площадь треугольника *KLN*, если известно, что *KN* = 6, а ∠*LMN* =120°.

(*ЕГЭ-2016, Т.Р.*)

1. Точки *P*, *Q*, *W* делят стороны выпуклого четырёхугольника *ABCD* в отношении *AP***:** *PB*= *CQ***:** *QB*= *CW***:** *WD*= 1:4, радиус окружности, описанной около треугольника *PQW,* равен 10, *PQ* = 16, *QW* = 12 .

а) Докажите, что треугольник *PQW−* прямоугольный.

б) Найдите площадь четырёхугольника *ABCD*.

(*ЕГЭ-2017, Т.Р.*)

1. Точки *P*, *Q*, *W* делят стороны выпуклого четырёхугольника *ABCD* в отношении *AP***:** *PB*= *CQ***:** *QB*= *CW***:** *WD*= 3:4, радиус окружности, описанной около треугольника *PQW,* равен 10, *PQ* = 16, *QW* = 12 .

а) Докажите, что треугольник *PQW−* прямоугольный.

б) Найдите площадь четырёхугольника *ABCD*.

(*ЕГЭ-2017, Т.Р.*)

1. Диагонали *AC* и *BD* четырёхугольника *ABCD*, вписанного в окружность, пересекается в точке *P*, причём *BC* = *CD*.

## а) Докажите, что *AB*: *BC* = *AP*: *PD*.

б) Найдите площадь треугольника *COD*, где *O* – центр окружности, вписанной в треугольник *ABD*, если дополнительно известно, что *BD* − диаметр описанной около четырёхугольника *ABCD* окружности, *AB* = 6, а *BC* =.

(***ЕГЭ-2015, основная волна***)

1. Диагонали *AC* и *BD* четырёхугольника *ABCD*, вписанного в окружность, пересекается в точке *P*, причём *BC* = *CD*.

## а) Докажите, что *AB*: *BC* = *AP*: *PD*.

б) Найдите площадь треугольника *COD*, где *O* – центр окружности, вписанной в треугольник *ABD*, если дополнительно известно, что *BD* − диаметр описанной около четырёхугольника *ABCD* окружности, *AB* = 5, а *BC* =.

(Сб.6, 2019, Сб.11, 2016)

1. Диагонали выпуклого четырёхугольника *ABCD* пересекаются в точке *P*. В треугольники *APB*, *BPC*, *CPD* и *APD* вписаны окружности с центрами *O*1, *O*2, *O*3 и *O*4 соответственно.

## а) Докажите, что прямые *O*1*O*3 и *O*2*O*4 перпендикулярны.

б) Пусть прямая *O*1*O*3 пересекает стороны *AB* и *CD* в точках *M* и *N* соответственно. Найдите отношение площадей треугольников *CPN* и *DPN*, если около четырёхугольника *ABCD* можно описать окружность и *AM* : *MB* = 1:2.

(Сб.12, 2019)

1. Четыре окружности, построенные как на диаметрах на сторонах выпуклого четырёхугольника *ABCD*, имеют общую точку, лежащую внутри четырёхугольника.

## а) Докажите, что диагонали четырёхугольника *ABCD* перпендикулярны.

б) Найдите площадь четырёхугольника *ABCD*, если длина диагонали *AC* равна , а отрезки, соединяющие середины противоположных сторон, перпендикулярны.

(Сб.7, 2020)

**Литература:**

1. ЕГЭ 2020. Математика. Профильный уровень. 10 вариантов. Типовые тестовые задания от разработчиков ЕГЭ / И.В. Ященко, М.А. Волчкевич, И.Р. Высоцкий, Р.К. Гордин, П.В. Семёнов, О.Н. Косухин, Д.А. Фёдоровых, А.И. Суздальцев, А.Р. Рязановский, В.А. Смирнов, А.В. Хачатурян, С.А. Шестаков, Д.Э. Шноль; под ред. И.В. Ященко. – М.: Издательство «Экзамен», 2020
2. ЕГЭ 2020. Математика. 14 вариантов. Профильный уровень. Типовые тестовые задания от разработчиков ЕГЭ / И.В. Ященко, М.А. Волчкевич, И.Р. Высоцкий, Р.К. Гордин, П.В. Семёнов, О.Н. Косухин, Д.А. Фёдоровых, А.И. Суздальцев, А.Р. Рязановский, В.А. Смирнов, А.В. Хачатурян, С.А. Шестаков, Д.Э. Шноль; под ред. И.В. Ященко. – М.: Издательство «Экзамен», издательство МЦНМО, 2020

ЕГЭ 2019. Математика. Профильный уровень. 14 вариантов. Типовые тестовые задания от разработчиков ЕГЭ / И.В. Ященко, М.А. Волчкевич, И.Р. Высоцкий, Р.К. Гордин, П.В. Семёнов, О.Н. Косухин, Д.А. Фёдоровых, А.И. Суздальцев, А.Р. Рязановский, В.А. Смирнов, А.В. Хачатурян, С.А. Шестаков, Д.Э. Шноль; под ред. И.В. Ященко. – М.: Издательство «Экзамен», 2019

1. ЕГЭ 2020. Математика. Профильный уровень. 36 вариантов. Типовые варианты экзаменационных заданий / И.В. Ященко, М.А. Волчкевич, И.Р. Высоцкий, Р.К. Гордин, П.В. Семёнов, О.Н. Косухин, Д.А. Фёдоровых, А.И. Суздальцев, А.Р. Рязановский, В.А. Смирнов, А.С. Трепалин, А.В. Хачатурян, С.А. Шестаков, Д.Э. Шноль; под ред. И.В. Ященко. – М.: Издательство «Экзамен», 2020

ЕГЭ 2019. Математика. Профильный уровень. 36 вариантов. Типовые тестовые задания от разработчиков ЕГЭ и 800 заданий части 2 / И.В. Ященко, М.А. Волчкевич, И.Р. Высоцкий, Р.К. Гордин, П.В. Семёнов, О.Н. Косухин, Д.А. Фёдоровых, А.И. Суздальцев, А.Р. Рязановский, И.Н. Сергеев, В.А. Смирнов, А.С. Трепалин, А.В. Хачатурян, С.А. Шестаков, Д.Э. Шноль; под ред. И.В. Ященко. – М.: Издательство «Экзамен», издательство МНЦМО, 2019

1. ЕГЭ 2020. Математика. Профильный уровень. 50 вариантов. Типовые варианты экзаменационных заданий от разработчиков ЕГЭ / И.В. Ященко, М.А. Волчкевич, И.Р. Высоцкий, Р.К. Гордин, П.В. Семёнов, О.Н. Косухин, Д.А. Фёдоровых, А.И. Суздальцев, А.Р. Рязановский, В.А. Смирнов, А.В. Хачатурян, С.А. Шестаков, Д.Э. Шноль; под ред. И.В. Ященко. – М.: Издательство «Экзамен», издательство МЦНМО, 2020

ЕГЭ 2019. Математика. Профильный уровень. 50 вариантов. Типовые тестовые задания от разработчиков ЕГЭ / И.В. Ященко, М.А. Волчкевич, И.Р. Высоцкий, Р.К. Гордин, П.В. Семёнов, О.Н. Косухин, Д.А. Фёдоровых, А.И. Суздальцев, А.Р. Рязановский, В.А. Смирнов, А.В. Хачатурян, С.А. Шестаков, Д.Э. Шноль; под ред. И.В. Ященко. – М.: Издательство «Экзамен», 2019

1. ЕГЭ-2018: Математика: 30 тренировочных вариантов экзаменационных работ для подготовки к единому государственному экзамену: профильный уровень / под ред. И.В. Ященко. – М.: АСТ, 2018
2. ЕГЭ. Математика. Профильный уровень: типовые экзаменационные варианты: 36 вариантов / под ред. И.В. Ященко. – М.: Издательство «Национальное образование», 2019

ЕГЭ. Математика. Профильный уровень: типовые экзаменационные варианты: 36 вариантов / под ред. И.В. Ященко. – М.: Издательство «Национальное образование», 2018

1. ~~Ященко И.В. ЕГЭ 2020. Математика. Профильный уровень. 20 вариантов тестов от разработчиков ЕГЭ. Тематическая рабочая тетрадь / И.В. Ященко, С.А. Шестаков; под ред. И.В. Ященко. – М.: Издательство «Экзамен», МНЦМО, 2020~~

~~Ященко И.В. ЕГЭ 2019. Математика. Профильный уровень. 20 вариантов тестов от разработчиков ЕГЭ. Тематическая рабочая тетрадь / И.В. Ященко, С.А. Шестаков; под ред. И.В. Ященко. – М.: Издательство «Экзамен», МНЦМО, 2019~~

1. Ященко И.В., Шестаков С.А. Подготовка к ЕГЭ по математике в 2020 году. Профильный уровень. – М.: МЦНМО, 2020

Ященко И.В., Шестаков С.А. Подготовка к ЕГЭ по математике в 2019 году. Профильный уровень. Методические указания. – М.: МЦНМО, 2019

1. Семенов А.В. Математика. Профильный уровень. Единый государственный экзамен. Готовимся к итоговой аттестации: [учебное пособие] / А.В. Семенов, А.С. Трепалин, И.В. Ященко, И.Р. Высоцкий, П.И. Захаров; под ред. И.В. Ященко; Московский Центр непрерывного математического образования. – М.: «Интеллект-Центр», 2019

Семенов А.В. Единый государственный экзамен. Математика. Профильный уровень. Комплекс материалов для подготовки учащихся. Учебное пособие. / А.В. Семенов, А.С. Трепалин, И.В. Ященко, И.Р. Высоцкий, П.И. Захаров; под ред. И.В. Ященко; Московский Центр непрерывного математического образования. – М.: Интеллект-Центр, 2018

1. Семенов А.В. Математика. Решение заданий повышенного и высокого уровней сложности. Как получить максимальный балл на ЕГЭ. Учебное пособие. / А.В. Семенов, И.В. Ященко, И.Р. Высоцкий, А.С. Трепалин, Е.А. Кукса; Московский центр непрерывного математического образования. – М.: Издательство «Интеллект-Центр», 2019
2. Методические материалы для председателей и членов предметных комиссий субъектов Российской федерации по проверке выполнения заданий с развернутым ответом экзаменационных работ ЕГЭ 2020 года. Математика. Методические рекомендации по оцениванию выполнения заданий ЕГЭ с развернутым ответом. / Руководитель комиссии по разработке контрольных измерительных материалов для проведения государственной итоговой аттестации по образовательным программам основного общего и среднего общего образования по математике И.В. Ященко, в.н.с. ФГБНУ «ФИПИ». Авторы: И.Р. Высоцкий, О.Н. Косухин, А.В. Семенов, А.С. Трепалин, М.А. Черняева. – Москва, ФИПИ, 2020

Методические материалы для председателей и членов предметных комиссий субъектов Российской федерации по проверке выполнения заданий с развернутым ответом экзаменационных работ ЕГЭ 2019 года. Математика. Методические рекомендации по оцениванию выполнения заданий ЕГЭ с развернутым ответом. / Руководитель комиссии по разработке контрольных измерительных материалов для проведения государственной итоговой аттестации по образовательным программам основного общего и среднего общего образования по математике И.В. Ященко, в.н.с. ФГБНУ «ФИПИ». Авторы-составители: И.Р. Высоцкий, О.Н. Косухин, А.В. Семенов, А.С. Трепалин. – Москва, ФИПИ, 2019

1. Гордин Р.К. ЕГЭ 2019. Математика. Геометрия. Планиметрия. Задача 16 (профильный уровень) / Под ред. И.В. Ященко. – М.: МЦНМО, 2019

Гордин Р.К. ЕГЭ 2019. Математика. Решение задачи 16 (профильный уровень). – М.: МЦНМО, 2019